ワインバーグ

場の量子論

3巻 非可換ゲージ理論

S. Weinberg 著
青山秀明
有末宏明 共訳

吉岡書店

ワインバーグ
場の量子論

3巻　非可換ゲージ理論

S. Weinberg　著
青山秀明
有末宏明　共訳

物理学叢書
78

吉岡書店

The Quantum Theory of Fields

Volume II
Modern Applications

Steven Weinberg
University of Texas at Austin

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

ルイーズに

目 次

(アステリスク (*) を付けた節はこの本の議論の本筋からは多少外れているので, 最初読むときには飛ばしてもよい.)

1 巻 粒子と量子場

2 巻 量子場の理論形式 内容

4 巻 場の量子論の現代的諸相

II 巻の序文

この巻* では素粒子の電弱・強相互作用の理解に至る場の量子論の発展を述べる. これらの相互作用はすべてゲージ理論の原理に支配されていることがわかっている. したがって, この本では 15 − 17 章で電磁理論のゲージ不変性を非可換群に一般化したゲージ理論について述べることから話を始める.

ゲージ理論の最もドラマティックな局面の幾つかは高エネルギーで現れるから, くりこみ群の理論を使って調べるのが最適だ. これは 18 章で導入し, 強い相互作用の現代的な非可換群ゲージ理論である量子色力学と, 物性理論での臨界現象に応用する. 19 章では一般的な大局的対称性の自発的破れを取り扱い, 量子色力学の近似的で破れている SU(2)×SU(2) や SU(3)×SU(3) 対称性に応用する. くりこみ群の方法も破れた対称性も演算子積展開への応用がもっとも興味深いものの一つであり, これは 20 章で扱う.

電弱理論の理解にはゲージ対称性の自発的破れが鍵となるが, これは 21 章で調べ, 電弱相互作用だけでなく超電導性にも応用する. アノマリーと呼ばれる量子力学的効果でも対称性が破られることがあるが, これは対称性の自発的破れと全く異なる. アノマリーとその様々な物理的効果は 22 章で述べる. 最後の 23 章では拡がりのある場の配

*訳者注: 日本語訳では, 原著 II 巻を分冊し, 15-19 章を 3 巻, 20-23 章を 4 巻とする. 原著 I 巻も同様に分冊し, 1-6 章を 1 巻, 7-14 章を 2 巻として刊行済みである.

位を調べる. それは, スカーミオン, 単極子, 渦線のような物理的状態の新たな要素として, またアノマリーが重要な役割をする経路積分の非摂動的量子補正として登場する.

これらの事柄を歴史を辿りながら述べていくと, 論理的に説明することは不可能となる. 私は, その代りに, この本で扱う事柄をもっとも教育的になるように記述することにした. つまり, それぞれのトピックを, その動機や数学的構造が, 後の方の章で述べる事柄をなるべく知らずに理解できるように導入した. これは論理的には多少順序が違うときにでもそのようにした. たとえば, 非可換ゲージ理論を長い章で一遍に導入する代りに, 15 章から 17 章までに分けた. これは 15 章では 16 章の外場の方法の動機を与え, この外場の方法が 17 章で必要となるからだ.

この記述の過程で, 読者は様々な形式を学ぶだろう. これには, BRST 不変性, 量子有効作用, ホモトピー理論が含まれる. バタリン・ビルコビスキー形式はオプションの脇道としておく. これは, 15 章で開いた, または, 閉じた対称性の代数に基づくゲージ理論の簡明な定式化として導入する. さらに 17 章では, 一般相対性理論を含む「非くりこみ可能な」ゲージ理論の無限大の相殺を調べるのに用い, 22 章である種のゲージ理論が摂動論の全ての次数でアノマリーを持たないことを証明するに使う. 有効場理論の方法は, この本を通じて非常によく使う. 特に, 超電導理論を含む, 対称性が破れた理論で役立つ. 一貫して, 詳細な計算を述べた方が読者には助けになるだろうと思えるところではページを費やし, ページ数の制約の中で明確に説明できないトピックは略し, 記述が最も明確になるように努力を重ねた.

I 巻と II 巻を貫く目標は, 場の量子論がなぜこのような形をとり, この形でなぜこのように見事に現実の世界を記述するのかを読者に説明することにある. I 巻では, なぜ我々に手の届くエネルギーで自然が有効場の量子論, 特にゲージ理論で記述されるかを強調しつつ, 場の

量子論の基礎の概略を述べた.(この本の目次の後に, I 巻の章の一覧を挙げた.**) この巻では場の量子論とゲージ不変性を出発点とし, その応用に専念した.

この本は場の量子論の基礎に多少なじみのある読者を対象としている. 読者が I 巻を読んでいることは (害にはならないが) 必ずしも仮定しない. 群論とトポロジーはそれぞれ導入したときに説明する.

この本で述べる形式的な方法 (BRST 不変性やくりこみ群など) は, 超対称性や超弦のような思索的な理論への応用にとって重要だ. 私はこれらの理論の将来に非常に希望を持っているが, それらには別の本一冊が必要だと思えるので, この本には含めなかった. (多分, 超対称性と超重力が III 巻の主題となるだろう.) また, 有限温度の場の理論, 格子ゲージ理論での計算法, N_c が大きいときの近似等の興味あるトピックも除外した. これらはこの本の他の部分には, 動機や数学としては必要ないし, すでにこの本は長すぎるくらいになっていたからだ.

私には場の量子論とその応用に関する非常に多くの文献をすべて読むことはできないし, それらから適切な引用をもれなくすることも不可能だ. しかし, それぞれのトピックについての原論文, ここで扱ったことの更なる発展を述べた論文や, また本文で言及した計算, データ, 証明の詳細が載った参考文献などは引用するように努めた. 前と同様に, 引用が無いからといって, そこで述べたことが私のオリジナルだというわけではない. ただし, オリジナルであることもある.

私の経験では, この巻は大学院生が 1 年間のコースで場の量子論の進んだトピックや素粒子論について学ぶのに適している. I 巻と II 巻からトピックを選べば, 場の量子論の基礎と現代的応用についての要約したコースの材料に適しているだろう. 各章には問題を付けた. これらの問題の一部は単にその章で述べた手法を使う練習になるし, 他はその章の結果をより広い理論に拡張することができることを指し

**訳者注: 日本語訳では, 1, 2 巻の目次と 4 巻の章立てを挙げた.

示している.

* * *

テキサス大学の以下の人たちから多くを学んだ. ここに感謝する. Luis Boya, Phil Candelas, Bryce DeWitt, Cecile DeWitt, Willy Fischler, Joaquim Gomis, Vadim Kaplunovsky, また, 特に Jacques Distler. それから, 以下の人たちからは様々なトピックについて有益な助けを頂いた. Luis Alvarez-Gaumé, Sidney Coleman, John Dixon, Tony Duncan, Jürg Fröhlich, Arthur Jacce, Marc Henneaux, Roman Jackiw, Joe Polchinski, Michael Tinkham, Cumrun Vaffa, Don Weingarten, Edward Witten, Bruno Zumino. Jonathan Evans はこの巻の原稿を通して読み, 多くの価値ある提案をした. この巻の1刷の修正については, Mark Byrd, Vincent Liu, Chun-yen Wang, 特に Michio Masujima の各氏を含む学生や同僚に感謝する. Alyce Wilson 氏は図を用意し, 私が LaTeX を使えるようになるまで原稿入力をし, Terry Riley 氏は数多くの書籍・文献を見つけてくれ, また Jan Duffy 氏には数多く助けていただいた. ケンブリッジ・ユニバーシティ・プレスの Maureen Storey と Alison Woollatt 両氏にはこの本の出版についての努力に, また特に編集者 Rufus Neal 氏には建設的な良い助言に感謝したい.

スティーブン・ワインバーグ

テキサス州オースティン

1995年12月

記法

ラテン文字 i, j, k などの添字は, 通常三つの空間座標に相当する 1,2,3 の値をとる. 特に記したところでは, $x_4 = it$ として, それらは 1,2,3,4 の値をとる.

μ, ν などのギリシャ文字のアルファベットの中間部を使った添字は, x^0 を時間座標として, 通常四つの時空座標に相当する 1,2,3,0 の値をとる.

α, β などのギリシャ文字のアルファベットの最初の方を使った添字は, 通常, 対称性の生成子の添字に使う.

繰り返されている添字については, 特に断らない限り, 和を取る.

時空の計量 $\eta_{\mu\nu}$ は対角であり, $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$, $\eta_{00} = -1$ ととる.

ダランベリアンは $\Box \equiv \eta^{\mu\nu}\partial^2/\partial x^\mu \partial x^\nu = \nabla^2 - \partial^2/\partial t^2$ と定義する. ここで ∇^2 はラプラシアン $\partial^2/\partial x^i \partial x^i$.

「レビ・チビタ・テンソル」$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ は $\epsilon^{0123} = +1$ を満たす完全反対称テンソル.

空間の 3 元ベクトルは太いボールド体の文字で表す.

アイソ・スピン空間のベクトルは矢印を使って表す.

ベクトルの上のハット記号 (ˆ) は, そのベクトルに対応する単位ベクトルを意味する. つまり, $\hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$.

どの量の上の点 (˙) も, その量の時間微分を表す.

ディラック行列 γ_μ は, $\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu}$ を満たすように定義されている. また, $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, および $\beta = i\gamma^0 = \gamma_4$ としている.

階段関数 $\theta(s)$ は, $s > 0$ で $+1$, $s < 0$ で 0 となる関数.

行列またはベクトル A の複素共役, 転置, エルミート共役はそれぞれ, A^*, A^{T}, $A^\dagger = A^{*\mathrm{T}}$ と記す. 演算子 O のエルミート共役は $O^\dagger$ と記す. ただし, 演算子のベクトルや行列が転置されないことを強調するところではアステリスク (*) を使う. 式の終りの +H.c. または +c.c. は, それぞれ前の項のエルミート共役か複素共役の項をたすことを意味する. ディラック・スピノル u の上の棒線は, $\bar{u} = u^\dagger\beta$ を意味する. バタリン・ビルコビスキー形式の場 χ の反場は, 通常の複素共役や反粒子の場と区別するために, χ^* を使わずに $\chi^\ddagger$ と記す.

$\hbar$ と光速を 1 にとる単位系を用いる. この本を通して, $-e$ は電子の有理系での電荷であり, 微細構造定数は $\alpha = e^2/4\pi \simeq 1/137$ となっている.

引用した数値データの終りの括弧内の数字は, そのデータの末尾の数字の不確定性を意味する. 特に述べない限り, 実験データは 'Review of Particle Properties,' *Phys. Rev.* **D50**, 1173 (1994) より引用している.

第 15 章

非可換ゲージ理論

現実の世界を成功裡に記述することが知られている場の量子論は全て非可換ゲージ理論だ. この種の理論は, 量子電磁理論の単純な $U(1)$ ゲージ不変性より一般的なゲージ不変性の原理に基づいている. 8.1 節で概略を述べたように, 電磁理論にはゲージ場の存在およびその幾つかの性質が局所ゲージ変換のもとでの不変性の原理から導かれるという魅力的な特質があるが, これらの非可換ゲージ理論も同様の特質を持っている. 電磁理論では, 電荷 e_n を持つ場 $\psi_n(x)$ は, 任意の関数 $\Lambda(x)$ を使ったゲージ変換 $\psi_n(x) \to \exp(ie_n\Lambda(x))\psi_n(x)$ を受ける. $\partial_\mu\psi_n(x)$ は $\psi_n(x)$ のように変換されないので, $A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x)$ とゲージ変換を受ける場 $A_\mu(x)$ を導入して, それを使いゲージ共変微分 $\partial_\mu\psi_n(x) - ie_nA_\mu(x)\psi_n(x)$ を構成する. これは $\psi_n(x)$ のように変換されるため, $\psi_n(x)$ と共にゲージ不変なラグランジアンの構成に使うことができる. 同様に, 一般相対論での重力場 $g_{\mu\nu}(x)$ の存在とその幾つかの性質は, 一般座標変換の対称性原理から生じる.* これらの優れた

*もちろん, 局所ゲージ不変性と一般共変性は自明なやり方で実現することもできる. これには, $A_\mu(x)$ と $g_{\mu\nu}(x)$ を力学的でない c 数の関数として, それぞれ, 単に位相と座標系を選ぶものとする. これらの対称性は, $A_\mu(x)$ と $g_{\mu\nu}(x)$ を力学的な場とし

先例からみて, 局所ゲージ不変性を局所非可換ゲージ変換のもとでの不変性に拡張するのは自然であった.

1954 年のヤン (Yang) とミルズ (Mills)[1] の原論文では, 非可換ゲージ群はアイソスピンの回転の $SU(2)$ に取られた. また, 光子の場に相当するベクトル場は, アイソスピンが 1 の強い相互作用をするベクトル中間子と解釈された. この提案はすぐに, ベクトル中間子は光子のように質量ゼロでなければならず, そのような粒子はすでに観測されているはずだという困難につきあたった. もう一つの問題は, 当時の強い相互作用の理論全ての問題でもあったが, この理論を使って何もできないということだった. これは, 相互作用定数が大きいために摂動論が使えないと思われたからだった.

ゲージ理論はすぐに任意の非可換ゲージ群に拡張された.[2] 特に, ファインマン[3], ファデーフとポポフ[4], ド・ウィット[5] 達はその量子化を数学的に調べ続けた. これには, より困難な一般相対論の量子化の問題への予備段階としての意味もあった. 彼らによって, ラグランジアンから単純に書き下したファインマン則には「ゴースト」ループを付け加える必要があることが見出された. しかし, これらの理論の物理的な重要性は 1960 年代の後半になるまで理解されなかった. やがて, 観測される全ての素粒子の相互作用は局所ゲージ対称性に伴うベクトル場によって起こることがわかった. この場に対応するスピン 1 の粒子は, ゲージ対称性の自発的破れによって非常に重くなっているか, または, 結合定数が遠距離で大きくなるために「閉じ込め」られている. これらはそれぞれ 21 章と 18 章で論じる. この章では非可換ゲージ理論の形式を調べ, ファインマン則を導く.

て扱い, S 行列を計算する際にはそれらについて積分するとしたときに, 物理的に重要となる.

15.1 ゲージ不変性

理論のラグランジアンが物質場 $\psi_\ell(x)$ の以下の微小変換の組で不変であるとする.

$$\delta\psi_\ell(x) = i\,\epsilon^\alpha(x)(t_\alpha)_\ell{}^m\psi_m(x)\,. \tag{15.1.1}$$

ここで, t_α は独立な定数行列の組,** また, $\epsilon^\alpha(x)$ は実の微小なパラメータであり (電磁理論のゲージ変換のように) 時空の位置に依存できるとする. これらの対称性変換はあるリー群の微小部分であると仮定する. 2.2 節で示したように, これは t_α が以下の交換関係を満たすことを意味する.

$$[t_\alpha, t_\beta] = i\,C^\gamma{}_{\alpha\beta}t_\gamma\,. \tag{15.1.2}$$

ここで, $C^\gamma{}_{\alpha\beta}$ は実の定数の組で, 群の構造定数として知られている. 交換子の反対称性から, 構造定数もまた以下のように反対称であることがすぐにわかる.

$$C^\gamma{}_{\alpha\beta} = -C^\gamma{}_{\beta\alpha}\,. \tag{15.1.3}$$

また, ヤコビ恒等式,

$$0 = \Big[[t_\alpha, t_\beta], t_\gamma\Big] + \Big[[t_\gamma, t_\alpha], t_\beta\Big] + \Big[[t_\beta, t_\gamma], t_\alpha\Big] \tag{15.1.4}$$

から, C がさらに拘束条件,

$$0 = C^\delta{}_{\alpha\beta}C^\epsilon{}_{\delta\gamma} + C^\delta{}_{\gamma\alpha}C^\epsilon{}_{\delta\beta} + C^\delta{}_{\beta\gamma}C^\epsilon{}_{\delta\alpha} \tag{15.1.5}$$

も満たすことがわかる. (15.1.3) と (15.1.5) を満たす定数 $C^\gamma{}_{\alpha\beta}$ の組から, 行列 $t^{\mathrm{A}}{}_\alpha$ を少なくとも一組, 次のように定義できる.

$$(t^{\mathrm{A}}{}_\alpha)^\beta{}_\gamma \equiv -i\,C^\beta{}_{\gamma\alpha}\,. \tag{15.1.6}$$

**この本では, 一般に対称性の生成子の添字はギリシャ文字の最初の方の α, β 等を使う. これはこれらの添字を時空座標の添字に使うギリシャ文字の μ, ν 等と区別するためだ. 後で破れた対称性を扱うときに, 破れた対称性の生成子の添字にラテン文字の最初の方の a, b 等を使い, 破れていない対称性の生成子の添字にラテン文字の i, j 等を使う.

実際, この行列は構造定数を $C^\gamma{}_{\alpha\beta}$ とする交換関係 (15.1.2) を満たす.

$$[t^{\mathrm{A}}{}_\alpha, t^{\mathrm{A}}{}_\beta] = i\, C^\gamma{}_{\alpha\beta} t^{\mathrm{A}}{}_\gamma\ . \qquad (15.1.7)$$

これは, 構造定数 $C^\alpha{}_{\beta\gamma}$ を持つリー代数の「随伴」(adjoint), または「正則」(regular) 表現と呼ばれる.

例えば, 元々のヤン・ミルズ理論では, 物質場は陽子場 ψ_p と中性子場 ψ_n からなる 2 重項,

$$\psi \ = \ \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

であり, $\alpha = 1,2,3$ の t_α はアイソスピン行列,

$$t_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ , \quad t_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ , \quad t_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となっていた. これらは,

$$C^\gamma{}_{\alpha\beta} \ = \ \epsilon_{\gamma\alpha\beta}$$

を構造定数とする (15.1.2) の交換関係を満たす. ここで, $\epsilon_{\gamma\alpha\beta}$ は通常のように γ, α, β が 1, 2, 3, の偶置換なら +1, 奇置換なら −1 となり, そのどちらでもなければゼロとなる. これは 3 次元回転群のリー代数 (2.4.18) と同じであり, 行列 t_α はこのリー代数のスピン 1/2 表現を与えている. 随伴表現の行列 (15.1.6) はここでは (行と列が 1,2,3 の添字に対応する基底で),

$$t_1^A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}\ , \quad t_2^A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}\ , \quad t_3^A = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる. これは回転群のリー代数のスピン 1 表現を与えている.

さて, ラグランジアンを (15.1.1) の変換のもとで不変にするには何が必要かを考えよう. もし場に微分が作用しなければ, その答えは簡

単だ. ϵ^α を定数とした変換 (15.1.1) のもとで不変な物質場の関数は, ϵ^α を時空座標の任意の実関数としても不変だ. これはラグランジアンが場の微分を含む (そうなっていなければならないが) 場合には当てはまらない. なぜなら, $\epsilon^\alpha(x)$ が位置に依存する関数なら, 物質場の微分は, その場自身のようには変換しないからだ. 実際, (15.1.1) を微分すると,

$$\delta\Big(\partial_\mu\psi_\ell(x)\Big) = i\,\epsilon^\alpha(x)(t_\alpha)_\ell{}^m\Big(\partial_\mu\psi_m(x)\Big) + i\Big(\partial_\mu\epsilon^\alpha(x)\Big)(t_\alpha)_\ell{}^m\psi_m(x) \tag{15.1.8}$$

となる. ラグランジアンを不変にするには, 場 $A^\alpha{}_\mu$ を導入して, その場の変換則が $\partial_\mu\epsilon^\alpha$ を含み (15.1.8) の第 2 項を打ち消せるようにしなければならない. この場は α の添字を持つので, これもまた, (15.1.1) のような行列の変換則で, t_α を随伴表現の行列 (15.1.6) に置き換えたものに従うと期待できる. したがって, とりあえずこれらの新しい「ゲージ」場を以下の変換則に従うとする.

$$\delta A^\beta{}_\mu = \partial_\mu\epsilon^\beta \;+\; i\,\epsilon^\alpha(t^{\mathrm{A}}{}_\alpha)^\beta{}_\gamma A^\gamma{}_\mu\,.$$

これは, (15.1.6) を使うと,

$$\delta A^\beta{}_\mu = \partial_\mu\,\epsilon^\beta \;+\; C^\beta{}_{\gamma\alpha}\epsilon^\alpha A^\gamma{}_\mu \tag{15.1.9}$$

とも書ける. これにより, 次の「共変微分」が構成できる.[†]

$$(D_\mu\psi(x))_\ell = \partial_\mu\psi_\ell(x) - i\,A^\beta{}_\mu(x)(t_\beta)_\ell{}^m\psi_m(x)\,. \tag{15.1.10}$$

計画どおり, (15.1.10) の第 2 項のなかの $A^\beta{}_\mu$ の変換の $\partial_\mu\epsilon^\beta$ の項は, 第 1 項の変換の $\partial_\mu\epsilon^\beta$ 項を打ち消す. その結果, 以下の項が残る.

$$\begin{aligned}\delta(D_\mu\psi)_\ell = i\,\epsilon^\alpha\,(t_\alpha)_\ell{}^m\,\partial_\mu\psi_m - i\,C^\beta{}_{\gamma\alpha}\,\epsilon^\alpha A^\gamma{}_\mu\,(t_\beta)_\ell{}^m\,\psi_m \\ + A^\gamma{}_\mu\,(t_\gamma)_\ell{}^m\,(t_\alpha)_m{}^n\,\psi_n\,.\end{aligned}$$

[†]次の節で述べるように, (15.1.10) を書くに当たって, 暗黙のうちに電荷のような結合定数はすべて t_β に含まれていて, したがって構造定数にも含まれているとする.

これは, (15.1.2) を使うと,

$$\delta(D_\mu\psi)_\ell \;=\; i\,\epsilon^\alpha\,(t_\alpha)_\ell{}^{m}\,(D_\mu\psi)_m \qquad (15.1.11)$$

となるので, $D_\mu\psi$ はちょうど ψ 自身のように変換する.

ゲージ場の微分も心配する必要がある. $\partial_\nu A^\beta{}_\mu$ の変換には $\partial_\nu\partial_\mu\epsilon^\beta$ の項があるので, これを打消すために電磁理論のように μ と ν について反対称化する. しかし, $\partial_\nu A^\beta{}_\mu - \partial_\mu A^\beta{}_\nu$ の変換には, (15.1.9) の第 2 項から生じる$\epsilon(x)$ の 1 階微分に比例する項がある. 「共変な回転」$F^\gamma{}_{\nu\mu}$ を, その変換で$\epsilon(x)$ の微分がすべて打ち消しあうようにするには, 物質場 ψ に働く二つの共変微分の交換子を考えるのがもっとも簡単だ.

$$\Big([D_\nu, D_\mu]\psi\Big)_\ell = -i\,(t_\gamma)_\ell{}^{m}F^\gamma{}_{\nu\mu}\psi_m\,. \qquad (15.1.12)$$

これにより,

$$F^\gamma{}_{\nu\mu} \equiv \partial_\nu A^\gamma{}_\mu - \partial_\mu A^\gamma{}_\nu + C^\gamma{}_{\alpha\beta}A^\alpha{}_\nu A^\beta{}_\mu \qquad (15.1.13)$$

となる. (15.1.12) から, $F^\gamma{}_{\nu\mu}$ が随伴表現に属する物質場のように変換しなければならないことは自明だ.

$$\delta\,F^\beta{}_{\nu\mu} \equiv i\,\epsilon^\alpha(t^{\mathrm{A}}{}_\alpha)^\beta{}_\gamma F^\gamma{}_{\nu\mu} = \epsilon^\alpha C^\beta{}_{\gamma\alpha}F^\gamma{}_{\nu\mu}\,. \qquad (15.1.14)$$

読者は (関係式 (15.1.5) を使って) 直接に計算して, (15.1.13) で定義された $F^\alpha{}_{\nu\mu}$ が実際に単純な変換則 (15.1.14) に従うことを確認できるだろう.

目的によっては, これらの微小ゲージ変換が有限の変換に格上げできることを知っていると便利だ. 群の要素は実関数 $\Lambda^\alpha(x)$ の組で特徴付けられ, 一般的な物質場 $\psi_\ell(x)$ に,

$$\psi_\ell(x) \to \psi_{\ell\Lambda}(x) = \Big[\exp\Big(i\,t_\alpha\Lambda^\alpha(x)\Big)\Big]_\ell{}^{m}\psi_m(x) \qquad (15.1.15)$$

のように行列として働く. 共変微分も同様に,

$$(\partial_\mu - i\,t_\alpha A^\alpha{}_{\mu\Lambda})\psi_\Lambda = \exp(i\,t_\alpha \Lambda^\alpha)\,(\partial_\mu - i\,t_\alpha A^\alpha_\mu)\psi \qquad (15.1.16)$$

と変換するのが望ましいので, $A^\alpha{}_\mu$ の変換則 $A^\alpha_\mu \to A^\alpha_{\mu\Lambda}$ は,

$$\partial_\mu \exp(i\,t_\beta \Lambda^\beta) - i\,t_\beta \exp(i\,t_\alpha \Lambda^\alpha)\,A^\beta_{\mu\Lambda} = -i\exp(i\,t_\alpha\Lambda^\alpha) t_\beta A^\beta$$

となることを要請する. これは書き換えると,

$$t_\alpha A^\alpha{}_{\mu\Lambda} = \exp(i\,t_\beta\Lambda^\beta)\,t_\alpha A^\alpha{}_\mu \exp(-it_\beta\Lambda^\beta) \\ -i\left[\partial_\mu \exp(it_\beta\Lambda^\beta)\right]\exp(-it_\beta\Lambda^\beta) \qquad (15.1.17)$$

を意味する. $\Lambda^\alpha(x)$ が微小の $\epsilon^\alpha(x)$ であるときは, (15.1.15) と (15.1.17) は前の変換則 (15.1.1) と (15.1.9) に帰着する.

(15.1.17) から, $\Lambda^\beta(x)$ をうまく選べば, $A^\alpha{}_{\mu\Lambda}(x)$ を任意の一つの点, たとえば $x = z$ でゼロとなるようにできることがわかる. (これには, 単に, $\Lambda^\alpha(z)$ がゼロとなるようにし, $x = z$ で $\partial\Lambda^\alpha(x)/\partial x^\mu = -A^\alpha{}_\mu(x)$ とすればよい.) また, 常に $\Lambda^\beta(x)$ を選んで, $A^\alpha{}_{\mu\Lambda}(x)$ の任意の一つの時空の成分が, 少なくともある与えられた点の周りの有限な領域の全ての点で, 全ての α についてゼロとなるようにできる. たとえば, $A^\alpha{}_{3\Lambda}(x)$ をゼロにするには, パラメータ $\Lambda^\beta(x)$ に対する以下の常微分方程式の組を解かなければならない.

$$\partial_3 \exp(it_\beta\Lambda^\beta) = -i\exp(i\,t_\beta\Lambda^\beta)\,t_\alpha A^\alpha{}_3\,. \qquad (15.1.18)$$

これは, 少なくともある与えられた点の周りの有限な領域で必ず解を一つ持つ.

しかしながら, 一般には $A^\alpha{}_{\mu\Lambda}(x)$ の 4 つの全ての成分が有限の領域でゼロとなるように $\Lambda^\alpha(x)$ を選ぶことはできない. この目的のためには, 以下の偏微分方程式の組を満たさなければならない.

$$\partial_\mu \exp(it_\beta\Lambda^\beta) = -i\exp(i\,t_\beta\Lambda^\beta)\,t_\alpha A^\alpha{}_\mu\,. \qquad (15.1.19)$$

しかし, これはある種の可積分条件が満たされないと解を持たない. 特に, もし $A^{\alpha}{}_{\mu\Lambda}(x)$ が全ての点でゼロとなると, $F^{\alpha}{}_{\mu\nu\Lambda}(x)$ もゼロとなる. しかし, 場の強度は斉次的に変換するから, $F^{\alpha}{}_{\mu\nu}(x)$ がゼロとなるときにのみ, $F^{\alpha}{}_{\mu\nu\Lambda}(x)$ がゼロとなることができる. ゲージ場 $A^{\alpha}{}_{\mu}(x)$ は, もしそれをどこでもゼロとするゲージ変換が存在すれば, 「純ゲージ」場と呼ばれる. $F^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ がどこでもゼロとなるという条件は, $A^{\alpha}{}_{\mu}(x)$ が任意の単連結領域で純ゲージ場で表されるための必要条件であるだけでなく, 十分条件であることを示すのは難しくない.

* * *

ここではゲージ変換で単純に変換する量を構成したが, これは一般相対論での一般座標変換のもとで共変的に変換する量を構成するのと深い類似性がある. ゲージ場を使って物質場の共変微分 $D_{\mu}\psi_{\ell}$ を作り, それが物質場自身と同じゲージ変換性を持つようにしたのと同様に, アフィン接続 $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}(x)$ を使い, テンソル $T^{\rho\sigma\cdots}{}_{\kappa\lambda\cdots}$ の共変微分を,

$$T^{\rho\cdots}{}_{\kappa\cdots;\nu} \equiv \partial_{\nu}T^{\rho\cdots}{}_{\kappa\cdots} + \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}T^{\lambda\cdots}{}_{\kappa\cdots} + \cdots - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\kappa}T^{\rho\cdots}{}_{\mu\cdots} - \cdots$$

と構成すると, これ自身もテンソルとなる. また, ゲージ場の微分からゲージ場の強度 $F^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ を作り, ゲージ群の随伴表現に属する物質場と同じゲージ変換性を持つようにできた. これに対応して, アフィン接続の微分から,

$$R^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\eta}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\kappa\eta} - \Gamma^{\eta}{}_{\mu\kappa}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\eta}$$

という量を構成すると, これはテンソルのように変換し, リーマン・クリストッフェル (Riemann–Christoffel) 曲率テンソルと呼ばれる. 二つのゲージ共変微分 D_{μ} と D_{ν} の交換子は, 場の強度 $F^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ を使って表せる. これと同様に, x^{ν} と x^{κ} に関する二つの共変微分の交換子は曲

率を使って, 以下のように表せる.

$$T^{\lambda\cdots}{}_{\mu\cdots;\nu;\kappa} - T^{\lambda\cdots}{}_{\mu\cdots;\kappa;\nu} = R^{\lambda}{}_{\sigma\nu\kappa} T^{\sigma\cdots}{}_{\mu\cdots} + \cdots - R^{\sigma}{}_{\mu\nu\kappa} T^{\lambda\cdots}{}_{\sigma\cdots} - \cdots .$$

有限の単連結領域でゲージ場がゼロとなるゲージが存在する必要十分条件は場の強度テンソルがゼロとなることだった. 同様に, 有限の単連結領域でアフィン接続がゼロとなる座標系が存在する必要十分条件は, リーマン・クリストッフェル曲率テンソルがゼロとなることだ. この二つの理論の間の類似は一つの重要な点で成り立たない. それは, 一般相対論では, アフィン接続はそれ自身, 計量テンソルの一回微分から構成されているに対し, ゲージ理論ではゲージ場は他のどのようなより基本的な場でも表されてはいないことだ.

15.2 ゲージ理論のラグランジアンと単純リー群

ゲージ場テンソル $F^{\alpha}{}_{\mu\nu}$, 物質場 ψ, それらの共変微分の変換則は, どれも変換パラメータ $\epsilon^{\alpha}(x)$ の微分を含まない. したがって, ラグランジアンがこれらのみから構成され, ϵ^{α} が一定の大域的変換のもとで不変ならば, 一般に座標に依存する $\epsilon^{\alpha}(x)$ のもとでも不変だ. したがって, ラグランジアンが,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, D_\mu\psi, D_\nu D_\mu\psi, \cdots, F^{\alpha}{}_{\mu\nu}, D_\rho F^{\alpha}{}_{\mu\nu} \cdots) \tag{15.2.1}$$

と書け, 不変条件,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_\ell} i(t_\alpha)_\ell{}^m \psi_m + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(D_\mu\psi)_\ell} i(t_\alpha)_\ell{}^m (D_\mu\psi)_m \\
&+ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(D_\nu D_\mu\psi)_\ell} i(t_\alpha)_\ell{}^m (D_\nu D_\mu\psi)_m + \cdots + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F^{\beta}{}_{\mu\nu}} C^{\beta}{}_{\gamma\alpha} F^{\gamma}{}_{\mu\nu} \\
&+ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial D_\rho F^{\beta}{}_{\mu\nu}} C^{\beta}{}_{\gamma\alpha} D_\rho F^{\gamma}{}_{\mu\nu} + \cdots = 0
\end{aligned} \tag{15.2.2}$$

を満たすと仮定する. また, ラグランジアンは, $F^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ やゲージ共変微分 D_μ を通じる以外にはゲージ場自身に依存してはならない. 特に, 質量項 $-\frac{1}{2}\,m^2{}_{\alpha\beta}\,A_{\alpha\mu}A_\beta{}^\mu$ は許されない.

ここで, ラグランジアンの $F^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ にのみ依存する項を考える. 電磁理論のように, 任意のスピンが 1 で質量がゼロの粒子について, ラグランジアンは $\partial_\mu A^\alpha{}_\nu - \partial_\nu A^\alpha{}_\mu$ についての 2 次の自由粒子の項を含まなければならない. ゲージ不変性より, この自由粒子項は場の強度テンソル $F^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ について 2 次の項の一部として現れなければならない. この項は, ローレンツ変換とパリティ保存から, $g_{\alpha\beta}$ を定数行列として,

$$\mathcal{L}_A = -\tfrac{1}{4}\,g_{\alpha\beta}F^{\alpha}{}_{\mu\nu}F^{\beta\mu\nu} \tag{15.2.3}$$

という形に決まる. もし, パリティ (または CP か T) 保存を仮定しなければ, ラグランジアンに, $\theta_{\alpha\beta}$ を別の定数行列として,

$$\mathcal{L}'_A = -\tfrac{1}{2}\,\theta_{\alpha\beta}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^{\alpha}{}_{\mu\nu}F^{\beta}{}_{\rho\sigma}$$

という項も含めることができる. この項は, 実はある関数の微分になっていて, 場の方程式やファインマン則には影響しない. しかし, そのような項は非摂動論的な量子効果を及ぼす. これは 23.6 節で論じる.

行列 $g_{\alpha\beta}$ の性質を考える前に, 一言注意に値することを述べておく. (15.1.13) で定義された場の強度 $F^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ の 2 次項からは (15.2.3) に相互作用が生じるが, ゲージ場 $A^\alpha{}_\mu(x)$ の運動項を, この相互作用項が生じないように導入するのは不可能だ. この点でも, 非可換ゲージ理論は一般相対論に似ている. 一般相対論では重力場のラグランジアンの運動項部分は, アインシュタイン・ヒルベルトのラグランジアン密度 $-\sqrt{g}R/8\pi G$ に含まれていて, これにはまた場の自己相互作用も含まれている. この二つの場合が似ているのには理由がある. 重力場が自分自身と相互作用するのは, それがエネルギーと運動量を持つもの全てと相互作用するからで, また, ゲージ場が自分自身と相互作用す

るのは, それがゲージ群の自明でない表現 (この場合は随伴表現) として変換するもの全てと相互作用するからだ. これは電磁理論と対照的だ. 光子は, それが相互作用する量子数である電荷を持たないので, 電磁場の運動項を相互作用無しに $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ と導入することが可能だ.

数値行列 $g_{\alpha\beta}$ は対称的にとることができ, ラグランジアンが実であるために実行列でなければならない. この項がゲージ不変性の条件 (15.2.2) を満たすためには, 全ての δ について,

$$g_{\alpha\beta}F^{\alpha}{}_{\mu\nu}C^{\beta}{}_{\gamma\delta}F^{\gamma\mu\nu}=0$$

が成立していなければならない. 関数 F の間に何ら関数関係を課すことなくこれを満たすには, 行列 $g_{\alpha\beta}$ は以下の条件を満たさなければならない.

$$g_{\alpha\beta}C^{\beta}{}_{\gamma\delta}= - g_{\gamma\beta}C^{\beta}{}_{\alpha\delta}\ . \tag{15.2.4}$$

もう一つ, 行列 $g_{\gamma\beta}$ についての重要な条件がある. 量子電磁理論のように, 正準量子化の法則と量子力学的スカラー積の正定値条件はラグランジアン (15.2.3) の中の行列 $g_{\alpha\beta}$ が正定値であることを要求する. (つまり, $g_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta}$ は全ての実の u に対して正で, 全ての α について $u^{\alpha}=0$ のときにのみゼロとなる.) これは, 実スカラー場 ϕ のラグランジアンの運動項 $-\frac{1}{2}Z\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi-\frac{1}{2}m^2\phi^2$ において定数 Z が正定値でなけらばならないことと類似している.

行列 $g_{\alpha\beta}$ に対するこれらの条件は非常に様々な影響を与える. これらは, 三つの同等な条件の組の一つとなっている.

a: 不変性条件 (15.2.4) を満たす実対称正定値行列 $g_{\alpha\beta}$ が存在する.

b: リー代数のある基底 (これを実の正則行列 $\mathcal{S}$ を使って $\tilde{t}_{\alpha}=\mathcal{S}_{\alpha\beta}t_{\beta}$ とする) において, その構造定数 $\tilde{C}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ が下の添字 β と γ のみならず, α, β, γ の三つの添字全てについても反対称になっている.

(この基底では α, β 等の上と下の添字の区別を無くし, $\tilde{C}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ の代りに $\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma}$ と書くと便利だ.)

c: リー代数が, 相互に可換なコンパクトな単純部分代数と $U(1)$ 部分代数の直和になっている.*

この章の補遺 A で条件 **a, b, c** の同等性を証明する.[7]

この結果の物理的な意味を論じる前に, コンパクト性の条件についてもう少し述べておくと有用だ. この事実はここでは使わないが, コンパクトなリー代数はコンパクト・リー群, つまり不変体積が有限なリー群の生成子になっている. 例えば, 回転群はコンパクトだが, ローレンツ群はコンパクトではない. コンパクトでない単純リー代数の簡単な例としては, 交換関係,

$$[t_1, t_2] = -i\,t_3, \qquad [t_2, t_3] = i\,t_1, \qquad [t_3, t_1] = i\,t_2$$

を考えるとよい. この例では構造定数は実だが, 完全には反対称ではない. そのゼロでない成分は,

$$C^3{}_{12} = -C^3{}_{21} = -1, \quad C^1{}_{23} = -C^1{}_{32} = 1, \quad C^2{}_{31} = -C^2{}_{13} = 1$$

---

*定義を導入しておく. リー代数 $\mathcal{G}$ の部分代数 $\mathcal{H}$ は, $\mathcal{G}$ の生成子 t_α の実の線形結合 $t_i = \mathcal{S}_{i\alpha} t_\alpha$ で張られる線型空間であり, t_i 同士の交換子が $[t_i, t_j] = ic^k{}_{ij} t_k$ という形で書けるという意味で $\mathcal{H}$ 自身がリー代数をなすものをいう. 部分代数 $\mathcal{H}$ は, その全代数 $\mathcal{G}$ の任意の要素と部分代数 $\mathcal{H}$ の任意の交換子が部分代数 $\mathcal{H}$ に属するとき, 不変 (invariant) という. **単純** (simple) リー代数とは, 不変部分代数を持たないものをいう. $\mathcal{G}$ の $U(1)$ 部分代数とは, 全代数 $\mathcal{G}$ の全ての生成子と可換な一つの生成子を持つものだ. **半単純** (semi-simple) リー代数とは, 不変可換部分代数, つまりその生成子が全て互いに可換である不変部分代数を持たないものをいう. 半単純リー代数は, 単純 (しかし $U(1)$ ではない) リー代数の和となっている. 単純か半単純なリー代数は, もし, 行列 $\mathrm{Tr}\,\{t^{\mathrm{A}}{}_\alpha\, t^{\mathrm{A}}{}_\beta\} = -C^\gamma{}_{\alpha\delta} C^\delta{}_{\beta\gamma}$ が正定値ならコンパクト (compact) だという. 単純性とコンパクト性の意味と重要さについては, 以下で更に述べる. リー代数 $\mathcal{G}$ が部分代数 $\mathcal{H}_n$ の直和であるとは, $C^{(n)c}{}_{ab}$ を部分代数 $\mathcal{H}_n$ の構造定数として, $\mathcal{G}$ の生成子 t_{na} のある基底で, 構造定数が,

$$C^{\ell c}{}_{na\; mb} = \delta_{\ell m} \delta_{mn} C^{(n)c}{}_{ab}$$

の形をしていることを意味する.

となっている. この場合, (15.A.10) で与えられる計量は対角的であり, 以下の要素を持っている.

$$g_{11} = g_{22} = -g_{33} = -2\,.$$

これは正定値行列ではないので, このリー代数はコンパクトではない. 実際, これは空間 2 次元, 時間 1 次元のローレンツ群である非コンパクト群 $O(2,1)$ のリー代数となっている.

生成子の二つの組が実の正則線型変換で関係しているとき, これらは同じリー代数を張り, 同じ群を生成すると考えられる. これは, 生成子の複素線型変換については当てはまらない. 特に, 任意の単純リー代数は基底を選んで生成子の位相を変えることによってコンパクトな形にできる. 例えば, 上の例のリー代数では, 新しい生成子を, $t'_1 = it_1$, $t'_2 = it_2$, $t'_3 = t_3$ と定義すれば, 交換関係は,

$$[t'_1, t'_2] = i\,t'_3, \quad [t'_2, t'_3] = i\,t'_1, \quad [t'_3, t'_1] = i\,t'_2$$

となり, 構造定数は $C^a{}_{bc} = \epsilon_{abc}$ となり, 実で完全反対称だ. そうすると, $g_{ab} = 2\delta_{ab}$ であり, 代数はコンパクトだ. これはもちろん, コンパクトな $O(3)$ 群, つまり 3 次元空間での回転の群のよく知られた代数になっている. これが任意のリー代数について常に可能なことを見るには, (15.A.10) で定義される行列 g_{ab} が実, 対称, 正則であり, こうしておけば, 実直交変換でゼロでない成分が主対角成分にのみある対角形にできることに着目する. このために, この基底で g_{ab} の負の対角成分に対応する生成子全てに, 因子 i をかければよい.

コンパクトなリー群の有限次元表現はすべてユニタリーで, それに対応してコンパクトなリー代数の有限次元表現はすべてエルミートであることを証明無しに述べておく. さらに, t_α が独立な自明でない有限次元エルミート行列で表現できるのは, $U(1)$ とコンパクト単純リー

代数の直和に限られることを見るのは簡単だ. これを示すには, 単に,

$$g_{\alpha\beta} \equiv \mathrm{Tr}\{t_\alpha t_\beta\}$$

と定義する. この行列は明らかに正定値だ. これは, $g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = \mathrm{Tr}\{(u^\alpha t_\alpha)^2\}$ が任意の実の u^α について正であり, $u^\alpha t_\alpha = 0$ のときにのみゼロだが, t^α は独立であると仮定するのでこれは全ての u^α がゼロのときにのみ可能なことによる. さらに, この $g_{\alpha\beta}$ は (15.2.4) の不変性条件を満たす. これは, (15.1.2) の交換関係に t_δ をかけてトレースを取ればよい. こうすると,

$$i\,C^\gamma{}_{\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left\{t_\gamma t_\delta\right\} = \mathrm{Tr}\left\{[t_\alpha, t_\beta]\,t_\delta\right\} = \mathrm{Tr}\left\{t_\delta t_\alpha t_\beta - t_\beta t_\alpha t_\delta\right\}$$

を得るが, これは明らかに β と δ について反対称だ. **a** を示したので, 上の定理により **c** が成立し, このリー代数がコンパクト単純リー代数と $U(1)$ 部分代数の直和であることがわかる.

さて, ゲージ理論の物理に戻ろう. この節では不変性条件 (15.2.4) を満たす正の実対称行列 $g_{\alpha\beta}$ が存在することを述べた. それは適切なゲージ場のラグランジアンの運動項を構成するために必要だった. この章の補遺 A では, この結果はリー代数がコンパクトな単純リー部分代数と $U(1)$ 部分代数の直和であるという条件に同等であることを示してある. 我々の目的にとって, 単純リー代数のタイプと次元が限られているためこの結果は重要な意味を持つ. たとえば, 生成子を二つ以下しか持たない単純リー代数は存在しないことは簡単にわかる. これは, 1 次元と 2 次元では三つの添字を持つ完全反対称構造定数でゼロでないものは存在しないからだ. 生成子が三つあれば, $C^3{}_{12}$, $C^2{}_{31}$, $C^1{}_{23}$ をすべてゼロでなくとって不変部分代数を避けることができる. 構造定数が実で完全反対称となる基底では, 可能性は,

$$C_{\alpha\beta\gamma} = c\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$$

という一つしかない. ここで c は任意のゼロでない実定数であり, 生成子のスケール変換 $t_\alpha \to t_\alpha/c$ で消すことができるから, リー代数は,

$$[t_\alpha, t_\beta] = i\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma} t_\gamma$$

となる. これは3次元回転群 $O(3)$ と, 2次元のユニタリー・ユニモジュラー行列の群 $SU(2)$ のリー代数であることが分かる. 元来のヤンとミルズの非可換ゲージ理論はこれに基づいている. 同様にして, 4, 5, 6, 7 個の生成子を持つ単純リー代数は存在せず, 8個の生成子を持つ単純リー代数は一つしかない, 等々のことを示せる. 数学者達 (特にキリング (Killing) とカルタン (E. Cartan)) は全ての単純リー代数を調べ上げることに成功した. 単純リー代数のコンパクトな形は「古典」リー群, つまり, ユニタリー・ユニモジュラー, ユニタリー・直交, ユニタリー・シンプレクティック群という無限の集合とたった五つの例外群からなる. その一覧は, この章の補遺 B に挙げる.

補遺 A では, 同等な条件, **a**, **b**, **c** のもとで計量が,

$$g_{ma,nb} = g_m^{-2}\delta_{mn}\delta_{ab} \tag{15.2.5}$$

という形になることも示す. ここで g_m は実であり, m と n は単純部分代数か, $U(1)$ 部分代数を示す添字だ. また, a と b はこれらの部分代数の個々の生成子を意味する. 定数 g_m^{-2} は, ゲージ場のスケール変換,

$$A^\mu_{ma} \to \tilde{A}^\mu_{ma} \equiv g_m^{-1} A^\mu_{ma} \tag{15.2.6}$$

で取り除ける. しかし, そうしたときに $D_\mu\psi$ と $F_\alpha{}^{\mu\nu}$ の表式 (15.1.10) と (15.1.13) が同じままであるためには, 行列 t_α と構造定数も,

$$t_{ma} \to \tilde{t}_{ma} = g_m t_{ma}\ , \tag{15.2.7}$$

$$C^{(m)}_{cab} \to \tilde{C}^{(m)}_{cab} = g_m C^{(m)}_{cab} \tag{15.2.8}$$

と再定義しなければならない. つまり, ゲージ場 (ティルダ ˜ は略する) のスケールを定義して, (15.2.5) の g_m が,

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \tag{15.2.9}$$

と単位行列になるように常にできる. しかし, このとき, 変換行列 t_α と構造定数 $C_{\alpha\beta\gamma}$ は単純部分代数と $U(1)$ 部分代数のそれぞれについて未知の積因子 g_m を含む. これらの因子は, ゲージ理論の結合定数となっている. これと違って, 各単純部分代数と $U(1)$ 部分代数ごとに t_α と構造定数について任意ではあるが固定した規格化を採用して, 結合定数がゲージ場のラグランジアン (15.2.3) に (15.2.5) の g_m^{-2} 因子として現れるようにする方が便利なときもある.

15.3 場の方程式と保存則

(15.2.3) において行列 $g_{\alpha\beta}$ を (15.2.9) とすると, 完全なラグランジアン密度は,

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4}\ F_{\alpha\mu\nu}F_\alpha{}^{\mu\nu} + \mathcal{L}_M(\psi,\, D_\mu\psi) \tag{15.3.1}$$

となる. ここで, $\mathcal{L}_M(\psi, \partial_\mu\psi)$ はゲージ場が無ければ「物質」のラグランジアン密度となるものだ. 原則的には, $\mathcal{L}_M$ が $F_{\alpha\mu\nu}$ や高次の微分 $D_\nu D_\mu\psi$, $D_\lambda F_{\alpha\mu\nu}$ 等に依存するようにしてもよいが, これらの非くりこみ可能な項は, 電磁理論と同じ理由で排除する. つまり, 12.3 節で論じたように, そのような項は通常のエネルギーでは, ある非常に大きな質量の逆冪で抑えられているはずだ. このため, 弱, 電磁, 強相互作用の標準理論は (15.3.1) の一般的な形のラグランジアンを持つ.

このゲージ場の運動方程式は,

$$\begin{aligned}\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_{\alpha\nu})} &= -\partial_\mu F_\alpha{}^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\alpha\nu}} \\ &= -F_\gamma{}^{\nu\mu} C_{\gamma\alpha\beta} A_{\beta\mu} - i\,\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial D_\nu\psi}\, t_\alpha\psi\end{aligned}$$

となる. これは,

$$\partial_\mu F_\alpha{}^{\mu\nu} = -\mathcal{J}_\alpha{}^\nu \tag{15.3.2}$$

と書ける. ただし, $\mathcal{J}_\alpha{}^\nu$ は,

$$\mathcal{J}_\alpha{}^\nu \equiv -F_\gamma{}^{\nu\mu} C_{\gamma\alpha\beta} A_{\beta\mu} - i\,\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial D_\nu \psi} t_\alpha \psi \tag{15.3.3}$$

で定義されるカレントだ. このカレント $\mathcal{J}_\alpha{}^\nu$ は,

$$\partial_\nu \mathcal{J}_\alpha{}^\nu = 0 \tag{15.3.4}$$

と, 通常の意味で保存する. これは, ψ のオイラー・ラグランジュ方程式と不変性条件 (15.2.2) からか, より簡単には, 場の方程式 (15.3.2) から直接に導ける.

(15.3.2) と (15.3.4) の微分は通常の微分であり, ゲージ共変な微分 D_ν ではないから, これらの式のゲージ共変性は多少わかりにくい. それを明白にするには, (15.3.2) を場の強度のゲージ共変微分,

$$\begin{aligned} D_\lambda F_\alpha{}^{\mu\nu} &\equiv \partial_\lambda F_\alpha{}^{\mu\nu} - i\,(t^A_\beta)_{\alpha\gamma} A_{\beta\lambda} F_\gamma{}^{\mu\nu} \\ &= \partial_\lambda F_\alpha{}^{\mu\nu} - C_{\alpha\gamma\beta} A_{\beta\lambda} F_\gamma{}^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{15.3.5}$$

を使って書き換えればよい. そうすると, (15.3.2) は,

$$D_\mu F_\alpha{}^{\mu\nu} = -J_\alpha{}^\nu \tag{15.3.6}$$

となる. ここで, $J_\alpha{}^\nu$ は,

$$J_\alpha{}^\nu \equiv -i\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial D_\nu \psi}\, t_\alpha \psi \tag{15.3.7}$$

であり, 物質場のみのカレントだ. これは, もし, $\mathcal{L}_M$ がゲージ不変ならゲージ共変だ. また, (15.3.6) に D_ν を施して, 交換関係,

$$[D_\nu, D_\mu] F^{\rho\sigma}_\alpha = -i\,(t^A{}_\gamma)_{\alpha\beta} F_{\gamma\nu\mu} F_\beta{}^{\rho\sigma} = -C_{\gamma\alpha\beta} F_{\gamma\nu\mu} F_\beta{}^{\rho\sigma}$$

を使うと, $J_\alpha{}^\nu$ が, 完全なカレント $\mathcal{J}_\alpha{}^\nu$ の満たす通常の保存則 (15.3.4) ではなく, ゲージ共変な保存則,

$$D_\nu J_\alpha{}^\nu = 0 \tag{15.3.8}$$

を満たすことがわかる. また, 以下の恒等式を導くのも ((15.1.5) を使えば) 簡単だ.

$$D_\mu F_{\alpha\nu\lambda} + D_\nu F_{\alpha\lambda\mu} + D_\lambda F_{\alpha\mu\nu} = 0\,. \tag{15.3.9}$$

これは, ゲージ場が場の方程式を満たすかどうかに依らず成立する.

これらの結果は, 15.1 節で述べた非可換ゲージ理論と一般相対論の間の深い類似性をさらに強調する. 一般相対論では J^μ に類似して, 物質のエネルギー・運動量テンソル $T^\nu{}_\mu$ がある. これは一般共変な保存則 $T^\nu{}_{\mu;\nu} = 0$ を満たし, アインシュタインの場の方程式 $R^\nu{}_\mu - \frac{1}{2}\delta^\nu{}_\mu R = -8\pi G T^\nu{}_\mu$ の右辺に一般共変な形で現れる. しかし, $\partial_\nu T^\nu{}_\mu$ はゼロとならず, $T^\nu{}_\mu$ は通常の意味で保存しない. 一方, アインシュタインの方程式の左辺の非線形項を右辺に移項すると, 場の方程式,[8]

$$\left(R^\nu{}_\mu - \frac{1}{2}\,\delta^\nu{}_\mu R\right)_{\text{LINEAR}} = -8\pi G\,\tau^\nu{}_\mu$$

が得られる. ここで, $\tau^\nu{}_\mu$ は,

$$\tau^\nu{}_\mu \equiv T^\nu{}_\mu + \frac{1}{8\pi G}\,\left(R^\nu{}_\mu - \frac{1}{2}\,\delta^\nu{}_\mu R\right)_{\text{NONLINEAR}}$$

であり, $\mathcal{J}_\alpha{}^\nu$ に似てテンソルではない. $\mathcal{J}_\alpha{}^\nu$ のように $\tau^\nu{}_\mu$ は,

$$\partial_\nu \tau^\nu{}_\mu = 0$$

と通常の意味で保存し,

$$P_\mu = \int \tau^0{}_\mu\, d^3x$$

となり, エネルギーと運動量のカレントと見なすことができる. これは純粋に重力的な項も含む. これは重力場がエネルギーと運動量を運ぶことによる. この項が無ければ, $\tau^{\nu}{}_{\mu}$ は保存されない. 同様に, $\mathcal{J}_{\alpha}^{\nu}$ はゲージ場の項も含む ((15.3.3) の右辺第 1 項). これは, 非可換群 ($C^{\gamma}_{\alpha\beta} \neq 0$ の群) ではゲージ場が相互作用する量子数を運ぶことによる. $\mathcal{J}_{\alpha}{}^{\nu}$ は通常の意味で保存するから, それをこれらの量子数のカレントと見ることができ, 対称性の生成子は時間に依存しない量,

$$T_{\alpha} = \int \mathcal{J}_{\alpha}{}^{0} d^3x \tag{15.3.10}$$

となる. (また, 一般相対論のビアンキ恒等式のように, 斉次方程式 (15.3.9) は共変微分を含む.) これと対照的に, これらの複雑なことは量子電磁理論には一切現れない. これは光子が, 相互作用の対象である量子数, つまり電荷を運ばないことによる.

15.4 量子化

これまでの二つの節で述べたゲージ理論の量子化に進む. ラグランジアン密度は (15.3.1) の形,

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4}\, F_{\alpha\,\mu\nu} F_{\alpha}{}^{\mu\nu} + \mathcal{L}_M(\psi, D_\mu\psi) \tag{15.4.1}$$

とする. ここで,

$$F_{\alpha\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu} + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} A_{\gamma\nu}\ ,$$
$$D_\mu\psi \equiv \partial_\mu\psi - i t_\alpha A_{\alpha\mu}\psi$$

としている. この理論では, 交換子をポアッソン括弧に i をかけたものに等しいとして安直に量子化を行うことはできない. 問題は一つの拘束条件にある. 7.6 節に述べたディラックの用語を使うならば, この

理論には, 第 1 種拘束条件,

$$\Pi_{\alpha 0} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^0_\alpha)} = 0 \tag{15.4.2}$$

と, A^0_α の場の方程式から導かれる第 2 種拘束条件,

$$\begin{aligned} -\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_{\alpha 0})} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha 0}} &= \partial_\mu F_\alpha{}^{\mu 0} + F_\gamma{}^{\mu 0} C_{\gamma\alpha\beta} A_{\beta\mu} + J_\alpha{}^0 \\ &= \partial_k \Pi_\alpha{}^k + \Pi_\gamma{}^k C_{\gamma\alpha\beta} A_{\beta\, k} + J_\alpha{}^0 = 0 \end{aligned} \tag{15.4.3}$$

がある. ここで, $\Pi^k_\alpha \equiv \partial\mathcal{L}/\partial(\partial_0 A_{\alpha k}) = F^{k0}_\alpha$ は $A_{\alpha\, k}$ の k が値 1, 2, 3 をとるものに共役な「運動量」だ. $\Pi_{\alpha 0}$ と $\partial_k \Pi_\alpha{}^k + \Pi_\gamma{}^k C_{\gamma\alpha\beta} A_{\beta\, k} + J_\alpha{}^0$ のポアッソン括弧はゼロとなる. (これは後者が $A_\alpha{}^0$ に依存しないからだ.) このため, これらは, 第 1 類拘束条件であり, ポアッソン括弧をディラック括弧に置き換えて処理することはできない.

電磁理論のときのように, これらの拘束条件はゲージを選ぶことにより処理する. 電磁理論で採用したクーロン・ゲージは, ここではひどく複雑な表式を導く.* そこで, その代りに軸性ゲージ (axial gauge),

$$A_{\alpha 3} = 0 \tag{15.4.4}$$

を使う. このとき, ゲージ場の正準変数は, $A_{\alpha i}$ で i が値 1 と 2 をとるものと, それらの正準共役,

$$\Pi_{\alpha i} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_{\alpha i})} = -F_\alpha{}^{0i} = \partial_0 A_{\alpha i} - \partial_i A_{\alpha 0} + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta 0} A_{\gamma i} \tag{15.4.5}$$

---

*クーロン・ゲージの取り扱いは純粋に代数的に複雑となるばかりでなく, (他の多くのゲージと同様に) グリボフ (Gribov) 任意性という問題をも抱えている.[9] これは, $\mathbf{A}_\alpha$ が空間的な無限遠でゼロとなるとしても, クーロン・ゲージ条件 $\nabla \cdot \mathbf{A}_\alpha = 0$ に対して有限なゲージ変換だけ異なる解が多数存在するという問題だ. ここでは, その問題が無い軸性ゲージで量子化し, 他のローレンツ・ゲージなどは摂動論を作るためにだけ使うので, グリボフ任意性は困難とはならない.

からなる. 場 $A_{\alpha 0}$ は独立な正準変数ではなく, 他の変数から拘束条件 (15.4.3) により決まる. これを見るには, 「電」場の強度 $F_\alpha{}^{\mu 0}$ が,

$$F_\alpha{}^{i0} = \Pi_{\alpha i}\,, \quad F_\alpha{}^{30} = \partial_3 A_\alpha{}^0 \tag{15.4.6}$$

であり, 拘束条件 (15.4.3) は,

$$-(\partial_3)^2 A_\alpha^0 = \partial_i \Pi_{\alpha i} + \Pi_{\gamma i} C_{\gamma\alpha\beta} A_{\beta i} + J_\alpha{}^0 \tag{15.4.7}$$

となることを見ればよい. これは (適切な境界条件のもとで) 簡単に解けて, $A_\alpha{}^0$ を $\Pi_{\gamma i}$, $A_{\beta i}$, $J_\alpha{}^0$ の汎関数として決定する. (ここで, i, j 等は 1,2 について和をとるという和の規約を使っている.) 物質場 ψ_ℓ の正準共役は,

$$\pi_\ell = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi_\ell)} = \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(D_0 \psi_\ell)} \tag{15.4.8}$$

で与えられるから, 物質場のカレントの時間成分は, 以下のように物質場のみの正準変数で表すことができる.

$$J_\alpha{}^0 = -i\,\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial(D_0\psi)_\ell}\,(t_\alpha)_\ell{}^m \psi_m = -i\,\pi_\ell (t_\alpha)_\ell{}^m \psi_m\,. \tag{15.4.9}$$

したがって, (15.4.7) から, 任意の時間の $A_\alpha{}^0$ がその時刻の正準変数 $\Pi_{\gamma i}$, $A_{\beta i}$, π_ℓ, ψ_m の汎関数として決定される.

このゲージで正準変数がわかったので, ハミルトニアンの構成に移れる. ハミルトニアン密度は,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \Pi_{\alpha i}\partial_0 A_{\alpha i} + \pi_\ell \partial_0 \psi_\ell - \mathcal{L} \\
&= \Pi_{\alpha i}\left(F_{\alpha 0 i} + \partial_i A_{\alpha 0} - C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta 0} A_{\gamma i}\right) + \pi_\ell \partial_0 \psi_\ell \\
&\quad - \tfrac{1}{2}\, F_{\alpha 0 i} F_{\alpha 0 i} + \tfrac{1}{2}\, F_{\alpha i j} F_{\alpha i j} + \tfrac{1}{2}\, F_{\alpha i 3} F_{\alpha i 3} \\
&\quad - \tfrac{1}{2}\, F_{\alpha 0 3} F_{\alpha 0 3} \; - \; \mathcal{L}_M
\end{aligned} \tag{15.4.10}$$

となる. (15.4.4) と (15.4.6) を使うと, これは,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_M + \Pi_{\alpha i}(\partial_i A_{\alpha 0} - C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta 0} A_{\gamma i}) + \tfrac{1}{2}\,\Pi_{\alpha i}\Pi_{\alpha i}$$

$$+\tfrac{1}{4}F_{\alpha ij}F_{\alpha ij}+\tfrac{1}{2}\partial_3 A_{\alpha i}\partial_3 A_{\alpha i}-\tfrac{1}{2}\partial_3 A_{\alpha 0}\partial_3 A_{\alpha 0} \tag{15.4.11}$$

と書きかえられる. ここで, $\mathcal{H}_M$ は物質のハミルトニアン密度,

$$\mathcal{H}_M \equiv \pi_\ell \partial_0 \psi_\ell - \mathcal{L}_M \tag{15.4.12}$$

だ.

9.2 節で導いた一般的な法則に従って, このハミルトニアン密度を使って行列要素を $A_{\alpha i}$, $\Pi_{\alpha i}$, ψ_ℓ, π_ℓ に関する経路積分として計算することができる. この経路積分の重み因子は,

$$I=\int d^4x\Big[\Pi_{\alpha i}\partial_0 A_{\alpha i}+\pi_\ell\partial_0\psi_\ell-\mathcal{H}+[\epsilon\ 項]\Big] \tag{15.4.13}$$

として, $\exp(iI)$ となっている. ここで, 「ϵ 項」はプロパゲーターの分母に正しい虚の微小項を与えるためだけに入っている. (9.2 節を見よ.) (15.4.7) と (15.4.9) は A^0_α を $\Pi_{\alpha i}$ と π_ℓ について線形な正準変数の汎関数として与える. (15.4.11) を調べると, ($\mathcal{L}_M$ が $D_\mu\psi$ について 3 次以上の項を含まないとして) 完全な作用 (15.4.13) の被積分関数は $\Pi_{\alpha i}$ と π_α について 3 次以上を含まないことがわかる. したがって, これらの正準「運動量」についての経路積分は, 通常のガウス積分を使って実行できることがわかる. この過程の問題は, (15.4.13) の $\Pi_{\alpha i}$ に関する 2 次項の係数は $A_{\alpha i}$ の関数なので, 面倒なことにガウス積分が場に依存する行列式の因子を作り出すことだ. また, この時点では, この形式全体が絶望的に非ローレンツ不変に見える.

このように進む代りに, 9.6 で電磁理論の経路積分形式に使った処方を適用することにする. もし, とりあえず $A_{\alpha 0}$ を独立変数としたら, 作用 (15.4.13) は $A_{\alpha 0}$ について明らかに 2 次であり, 2 次の項 $A_{\alpha 0}(x)A_{\beta 0}(y)$ の係数は場に依存しない核 $(\partial_3)^2\delta^4(x-y)$ になる. 9 章の補遺で見たように, $A_{\alpha 0}(x)$ に関するガウス積分は, 定数因子を除い

て, その被積分関数の指数関数の引数が定留する点での値に等しい. 作用の変分は,

$$\frac{\delta I}{\delta A_{\alpha 0}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A_{\alpha 0}} = J_\alpha{}^0 + \partial_i \Pi_{\alpha i} + C_{\beta\alpha\gamma}\Pi_{\beta i}A_{\gamma i} - \partial_3^2 A_{\alpha 0}$$

となるので, 作用が停留する「点」は拘束条件 (15.4.7) の解だ. したがって, $A_{\alpha 0}$ に (15.4.7) の解を使う代りに, それを積分の独立変数として扱ってもよい.

$A_{\alpha 0}$ を独立変数とすると, ハミルトニアン $\int d^3x\mathcal{H}$ は明らかに $\Pi_{\alpha i}$ について 2 次であり, 2 次項 $\Pi_{\alpha i}(x)\Pi_{\beta j}(y)$ の係数は場と独立な核 $\frac{1}{2}\delta^4(x-y)\delta_{ij}$ だ. 物質場の変数 π_ℓ についても同様だとすると, π_ℓ と $\Pi_{\alpha i}$ についての経路積分は, 定数因子を除いて, π_ℓ と $\Pi_{\alpha i}$ を (15.4.1) に対応する作用が停留する「点」,

$$0 = \frac{\delta I}{\delta \pi_\ell} = \partial_0 \psi_\ell \ - \ \frac{\partial \mathcal{H}_M}{\partial \pi_\ell} \, ,$$

$$0 = \frac{\delta I}{\delta \Pi_{\alpha i}} = \partial_0 A_{\alpha i} - \Pi_{\alpha i} - \partial_i A_{\alpha 0} + C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta 0}A_{\gamma i} = F_{\alpha 0 i} - \Pi_{\alpha i}$$

での値と置いて求めることができる. これらを (15.4.13) に代入すると以下を得る.

$$\begin{aligned} I = \int d^4x \, \Big[& \mathcal{L}_M + \tfrac{1}{2} F_{\alpha 0 i} \, F_{\alpha 0 i} \\ & -\tfrac{1}{2} F_{\alpha ij}F_{\alpha ij} - \tfrac{1}{2} \partial_3 A_{\alpha i}\partial_3 A_{\alpha i} + \tfrac{1}{2} \left(\partial_3 A_{\alpha 0}\right)^2 \Big] \\ = \int & d^4x \, \mathcal{L} \, . \end{aligned} \tag{15.4.14}$$

ここで, $\mathcal{L}$ は最初に出発点となったラグランジアン (15.3.1) だ. 言い換えれば, 経路積分は (15.4.14) と (15.3.1) で与えられる $\exp(iI)$ という明白に共変的な重み因子を使って, $\psi_\ell(x)$ と $A_{\alpha\mu}(x)$ の四つの成分全てについて行えばよい. ただし,

$$\prod_{x,\alpha} \delta\Big(A_{\alpha 3}(x)\Big) \tag{15.4.15}$$

の因子を代入することにより軸性ゲージ条件を課す．$\mathcal{O}_A, \mathcal{O}_B \cdots$ がゲージ不変な限り，

$$\langle T\{\mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\cdots\}\rangle_{\text{VACUUM}} \propto \int \left[\prod_{\ell,x} d\psi_\ell(x)\right] \left[\prod_{\alpha,\mu,x} dA_{\alpha\mu}(x)\right]$$
$$\times\ \mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\cdots\ \exp\{iI + [\epsilon\ 項]\} \prod_{x,\alpha} \delta\left(A_{\alpha 3}(x)\right) \tag{15.4.16}$$

が成立する．ここで，I は (15.4.14) で与えられるローレンツ不変でゲージ不変な作用だ．

* * *

将来の参考のため，(15.4.16) のゲージ場についての積分の体積要素 $\prod_{\alpha,\mu,x} dA_{\alpha\mu}(x)$ は，

$$\prod_{\alpha,\mu,x} dA_{\Lambda\ \alpha\mu}(x) = \prod_{\alpha,\mu,x} dA_{\alpha\mu}(x) \tag{15.4.17}$$

という意味でゲージ不変であることを述べておく．ここで，$A_{\Lambda\ \alpha\mu}(x)$ は $A_{\alpha\mu}(x)$ に変換パラメータを $\Lambda_\alpha(x)$ とするゲージ変換を施したものだ．これは単位元に近い変換について成立することを示せば充分だ．その微小変換のパラメータを $\lambda_\alpha(x)$ とすると，この場合，

$$A^\mu_{\lambda\ \alpha} = A^\mu_\alpha + \partial^\mu\lambda_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma}\, A^\mu_\beta\lambda_\gamma$$

だから，体積要素は，

$$\prod_{\alpha,\mu,x} dA_{\lambda\ \alpha\mu}(x) = \text{Det}(\mathcal{N}) \prod_{\alpha,\mu,x} dA_{\alpha\mu}(x)$$

で関係している．ここで，$\mathcal{N}$ は「行列」，

$$\mathcal{N}_{\alpha\mu x,\beta\nu y} = \frac{\delta A_{\lambda\ \alpha\mu}(x)}{\delta A_{\beta\nu}(y)} = \delta^4(x-y)\,\delta^\nu_\mu\left[\delta_{\alpha\beta} + C_{\alpha\beta\gamma}\lambda_\gamma(x)\right]$$

だ. トレース $C_{\alpha\alpha\gamma}$ はゼロだから, $\mathcal{N}$ の行列式は λ_γ の一次までで 1 となっている.

この章では, 物質場の積分の体積要素 $\prod_{n,x} d\psi_n(x)$ もゲージ不変だと仮定する. これについては, 重要で微妙な点がある. 22 章でこの点に戻るが, そこで示すように, 我々がここで取り扱っている強・電弱相互作用の非可換ゲージ理論ではこの仮定は成立する.

15.5 ド・ウィット・ファデーフ・ポポフ法

経路積分の我々の表式 (15.4.16) は正準量子化に便利なゲージで導いた. しかし, この表式から導かれるファインマン則では, 理論の回転不変性とローレンツ不変性は自明ではない. 明白にローレンツ不変なファインマン則を導くには, ゲージを変更する必要がある.

まず, (15.4.16) は (重要でない定数因子を除いて) 以下の形の一般的な種類の汎関数積分の一例になっていることに着目する.

$$\mathcal{I} = \int \left[\prod_{n,x} d\phi_n(x)\right] \mathcal{G}[\phi]\, B\Big[f[\phi]\Big]\, \mathrm{Det}\, \mathcal{F}[\phi]\,. \tag{15.5.1}$$

ここで, $\phi_n(x)$ はゲージ場と物質場の組であり, $\prod_{n,x} d\phi_n(x)$ は体積要素だ. $\mathcal{G}[\phi]$ は $\phi_n(x)$ の汎関数であり, ゲージ不変性条件,

$$\mathcal{G}[\phi_\lambda] \prod_{n,x} d\phi_{\lambda n}(x) = \mathcal{G}[\phi] \prod_{n,x} d\phi_n(x) \tag{15.5.2}$$

を満たす. ここで, $\phi_{\lambda n}(x)$ は ϕ に $\lambda_\alpha(x)$ をパラメータとするゲージ変換を施した結果だ. (通常これが満たされていると, 汎関数 $\mathcal{G}$ と体積要素は, 個々に不変だ. しかし, 我々が必要とするのは (15.5.2) だけだ.) また, $f_\alpha[\phi; x]$ はこれらの場に依存する非ゲージ不変な「ゲージ固定汎関数」であり, x と α に依存する. $B[f]$ は x と α の一般的な

関数 $f_\alpha(x)$ について定義された数値的な汎関数だ. $\mathcal{F}$ は「行列」,

$$\mathcal{F}_{\alpha x,\beta y}[\phi] \equiv \left.\frac{\delta f_\alpha[\phi_\lambda;x]}{\delta\lambda_\beta(y)}\right|_{\lambda=0} \tag{15.5.3}$$

だ. (ここで, 関数や汎関数の汎関数についての我々の通常の記法に従って, $B\Big[f[\phi]\Big]$ は, 明示されている関数 $\phi_n(x)$ は固定されているが, 陽には書いていない変数 α と x の全ての値について $f_\alpha[\phi;x]$ がとる値に依存するものと理解しておく.) (15.5.1) は (15.4.16) を最も広い範囲に一般化したものではない. 15.7 節で見るように, これを更に一般化したものは存在し, ある種の目的には必要となる. ここでは, (15.5.1) から出発するが, これは 15.7 節の理論形式の動機付けになり, また, 非可換ゲージ理論をもっとも便利な幾つかのゲージで扱うには適切だからだ.

さて, 経路積分 (15.4.16) が実際に (15.5.1) の特別な場合になっていることを確認しておく. (15.4.16) では, 場 $\phi_n(x)$ は $A_{\alpha\mu}(x)$ と物質場 $\psi_\ell(x)$ からなり,

$$f_\alpha[A,\psi;x] \;=\; A_{\alpha 3}(x)\,, \tag{15.5.4}$$

$$B[f] \;=\; \prod_{x,\alpha}\delta\Big(f_\alpha(x)\Big)\,, \tag{15.5.5}$$

$$\mathcal{G}[A,\psi] = \exp\{iI + [\epsilon\ \text{項}]\,\}\,\mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\cdots\,, \tag{15.5.6}$$

$$\prod_{n,x} d\phi_n(x) = \left[\prod_{\ell,x} d\psi_\ell(x)\right]\ \left[\prod_{\alpha,\mu,x} dA^\mu_\alpha(x)\right] \tag{15.5.7}$$

となっている. (ここで, $\alpha,\beta,\cdots$ の添字の上付きと下付きは区別していない.) (15.4.16) を (15.5.1)–(15.5.3) と比べると, これらの経路積分は, $\mathrm{Det}\,\mathcal{F}[\phi]$ の因子を除いて同じであることがわかる. ゲージ固定汎関数が (15.5.4) の場合は, この因子は場に依存しない. もし $A^3_\alpha(x)=0$ なら, $\lambda_\alpha(x)$ をパラメータとするゲージ変換のもとで $A^3_\alpha(x)$ の変化

分は，

$$A^3_{\lambda\alpha}(x) = \partial_3\,\lambda_\alpha(x) = \int d^4y\;\lambda_\alpha(y)\,\partial_3\delta^4(x-y)$$

となるから，この場合 (15.5.3) は場に依存しない「行列」，

$$\mathcal{F}_{\alpha x,\beta y}[\phi] = \delta_{\alpha\beta}\,\partial_3\delta^4(x-y)$$

だ．したがって，(15.5.1) の行列式もこのゲージでは場に依存しない．9 章で論じたように，汎関数積分での場に依存しない因子は，期待値や S 行列の真空揺らぎの部分にしか影響しない．したがって，S 行列の連結部分の計算には不要だ．

非可換ゲージ理論の汎関数積分としての (15.4.16) が，一般的な経路積分 (15.5.1) の特別な場合になっていることを認識する意味は，この後者の形ではゲージを自由に変えることができることにある．特に，積分 (15.5.1) はゲージ固定汎関数 $f_\alpha[\phi;x]$ には実際には (緩い制限のもとで) 依存せず，汎関数 $B[f]$ の選び方は，重要ではない定数因子にしか影響しないという定理がある．

証明: (15.5.1) で積分変数 ϕ を全て新しい変数 ϕ_Λ に置き換える．ここで，$\Lambda^\alpha(x)$ は任意の (しかし固定した) ゲージ変換パラメータの組だ．

$$\mathcal{I} = \int \left[\prod_{n,x} d\phi_{\Lambda n}(x)\right] \mathcal{G}[\phi_\Lambda] B\Big[f[\phi_\Lambda]\Big] \mathrm{Det}\;\mathcal{F}[\phi_\Lambda]\,. \qquad (15.5.8)$$

(この段階は数学的には自明なものだ．これは，積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ を $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy$ と読み替えるようなもので，ゲージ不変性の仮定に依らない.) そして，測度 $\Pi d\phi$ と汎関数 $\mathcal{G}[\phi]$ の積のゲージ不変性の仮定 (15.5.2) を使い，これを以下のように書き換える．

$$\mathcal{I} = \int \left[\prod_{n,x} d\phi_n(x)\right]\; \mathcal{G}[\phi] B\Big[f[\phi_\Lambda]\Big]\;\mathrm{Det}\;\mathcal{F}[\phi_\Lambda]\,. \qquad (15.5.9)$$

$\Lambda^\alpha(x)$ は任意だから，この左辺はそれに依存できない．$\Lambda^\alpha(x)$ につい

て, ある重み汎関数 $\rho[\Lambda]$ (これは後で選ぶ) をかけて積分すると,

$$\mathcal{I}\int\left[\prod_{\alpha,x}d\Lambda^{\alpha}(x)\right]\rho[\Lambda]=\int\left[\prod_{n,x}d\phi_n(x)\right]\mathcal{G}[\phi]C[\phi] \tag{15.5.10}$$

を得る. ここで,

$$C[\phi]\equiv\int\left[\prod_{\alpha,x}d\Lambda^{\alpha}(x)\right]\rho[\Lambda]\,B\Big[f[\phi_\Lambda]\Big]\mathrm{Det}\ \mathcal{F}[\phi_\Lambda] \tag{15.5.11}$$

となっている. さて, (15.5.3) から,

$$\mathcal{F}_{\alpha x,\beta y}[\phi_\Lambda]=\left.\frac{\delta f_\alpha[(\phi_\Lambda)_\lambda;x]}{\delta\lambda^\beta(y)}\right|_{\lambda=0} \tag{15.5.12}$$

となる. これらの変換は群をなすと仮定している. つまり, 以下のように, $\Lambda^\alpha(x)$ をパラメータとするゲージ変換に続いて $\lambda^\alpha(x)$ をパラメータとするゲージ変換をした結果は, それらの「積」となっていて, $\tilde{\Lambda}^\alpha(x;\Lambda,\lambda)$ をパラメータとする一つのゲージ変換の結果と書けるとしている.

$$(\phi_\Lambda)_\lambda=\phi_{\tilde{\Lambda}(\Lambda,\lambda)} \tag{15.5.13}$$

偏 (汎関数) 微分の連鎖則を使うと,

$$\mathcal{F}_{\alpha x,\beta y}[\phi_\Lambda]=\int\mathcal{J}_{\alpha x,\gamma z}[\phi,\Lambda]\mathcal{R}^{\gamma z}{}_{\beta y}[\Lambda]d^4z \tag{15.5.14}$$

を得る. ここで,

$$\mathcal{J}_{\alpha x,\gamma z}[\phi,\Lambda]\equiv\left.\frac{\delta f_\alpha[\phi_{\tilde{\Lambda}};x]}{\delta\tilde{\Lambda}^\gamma(z)}\right|_{\tilde{\Lambda}=\Lambda}=\frac{\delta f_\alpha[\phi_\Lambda;x]}{\delta\Lambda^\gamma(z)} \tag{15.5.15}$$

であり,

$$\mathcal{R}^{\gamma z}{}_{\beta y}[\Lambda]=\left.\frac{\delta\tilde{\Lambda}^\gamma(z;\Lambda,\lambda)}{\delta\lambda^\beta(y)}\right|_{\lambda=0} \tag{15.5.16}$$

となっている. したがって,

$$\mathrm{Det}\ \mathcal{F}[\phi_\Lambda]=\mathrm{Det}\ \mathcal{J}[\phi,\Lambda]\ \ \mathrm{Det}\ \mathcal{R}[\Lambda] \tag{15.5.17}$$

が得られる. Det $\mathcal{J}[\phi, \Lambda]$ は積分変数を $\Lambda^\alpha(x)$ から (ϕ は固定しておいて) $f_\alpha[\phi_\Lambda; x]$ に変換した際のヤコビアンに過ぎない. したがって, もし, 重み関数 $\rho(\Lambda)$ を,

$$\rho(\Lambda) = 1 \Big/ \text{Det } \mathcal{R}[\Lambda] \tag{15.5.18}$$

と選べば,

$$\begin{aligned} C[\phi] &= \int \left[\prod_{\alpha,x} d\Lambda^\alpha(x)\right] \text{ Det } \mathcal{J}[\phi, \Lambda]\, B\Big[f[\phi_\Lambda]\Big] \\ &= \int \left[\prod_{\alpha,x} df_\alpha(x)\right] B\,[f] \equiv C \end{aligned} \tag{15.5.19}$$

となる. これは明らかに ϕ に依存しない. (読者は (15.5.18) は群のパラメータ空間の不変 (ハール) 測度を与えることに気付くだろう.) こうして, 結局,

$$\mathcal{I} = \frac{C\int \left[\prod_{n,x} d\phi_n(x)\right] \mathcal{G}[\phi]}{\int \left[\prod_{\alpha,x} d\Lambda^\alpha(x)\right] \rho[\Lambda]} \tag{15.5.20}$$

を得る. これは明らかに $f_\alpha[\phi; x]$ の選び方に依らない. $f_\alpha[\phi; x]$ は単に積分変数に帰着して, $\mathcal{I}$ は $B[f]$ には定数 C を通じてしか依らない. これが証明したいことだった.

この定理の応用に進む前に, ちょっと立ち止まってこの導出の微妙な点について述べておく. (15.5.20) の分子と分母の積分は共に同じ理由で定義されていない. $\mathcal{G}[\phi]$ はゲージ不変なので, その ϕ に関する積分は収束することは有り得ない. これは, 被積分関数は ϕ を可能な全ての $\lambda^\alpha(x)$ を使って ϕ_λ と変換して得られる全ての「軌道」に沿って定数であることによる. 同様に, 分母の積分も $\rho(\Lambda)\Pi d\Lambda$ が群について積分するときの通常の不変体積要素にほかならず, これも「軌道」$\Lambda \to \tilde{\Lambda}(\Lambda, \lambda)$ に沿って定数なので発散する. この発散は, 時空の有限個の格子点上で理論を作ると, (15.5.20) の分子と分母の両方ともで避け

ることができる. その場合は, ゲージ群の体積は, 単にリー群の体積を格子点の数の積だけかけたものだ. ゲージ固定因子 $B[f]$ は (15.5.20) の左辺の元の定義 (15.5.1) のこの発散を消すので, 格子点の数が無限大に行くにつれ, 発散は (15.5.20) の右辺の分子と分母で打ち消すと考えられる.

本題に入ろう. 軸性ゲージでの真空期待値 (15.4.16) は一般的な (15.5.1) の形の汎関数積分で与えられることを見た. これより, 上の定理を使うと, $f_\alpha[A,\psi;x]$ と $B[f]$ を (ほとんど) どう選ぼうと,

$$\langle T\{\mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\cdots\}\rangle_V \propto \int \left[\prod_{\ell,x} d\psi_\ell(x)\right] \left[\prod_{\alpha,\mu,x} dA^\mu{}_\alpha(x)\right] \\ \times \mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\cdots\exp\{i\,I + [\epsilon\text{ 項}]\}\, B\Big[f[A,\psi]\Big]\text{Det}\,\mathcal{F}[A,\psi] \tag{15.5.21}$$

と結論できる. したがって, (15.5.21) を使って, より便利なゲージでのファインマン則を導くことが自由にできる.

経路積分で我々が計算できるものはガウス型の因子と多項式の積の積分に限られているので, 一般的に ξ を任意の実パラメータとして,

$$B[f] = \exp\left(-\frac{i}{2\xi}\int d^4x\ f_\alpha(x)f_\alpha(x)\right) \tag{15.5.22}$$

とする. このように選ぶと, (15.5.21) の因子 B の影響は単に有効ラグランジアンに次の項を付け加えるだけだ.

$$\mathcal{L}_{\text{EFF}} = \mathcal{L} - \frac{1}{2\xi}f_\alpha f_\alpha\,. \tag{15.5.23}$$

ゲージ固定関数 f_α の最も簡単なローレンツ不変な選び方は, 電磁理論と同じく,

$$f_\alpha = \partial_\mu A^\mu_\alpha \tag{15.5.24}$$

とすることだ. そうすると, 裸のゲージ場のプロパゲーターは量子電磁理論と全く同じく計算できる. 有効作用のベクトル・ボソンの自由

項は,

$$I_{0A} = -\int d^4x \left[\frac{1}{4}(\partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu})(\partial^\mu A_\alpha{}^\nu - \partial^\nu A_\alpha{}^\mu) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\alpha{}^\mu)(\partial_\nu A_\alpha{}^\nu) \ + \ [\epsilon\ 項] \right]$$
$$= -\frac{1}{2}\int d^4x\, \mathcal{D}_{\alpha\mu x,\beta\nu y}\, A_\alpha{}^\mu(x) A_\beta{}^\nu(y)$$

と書かれる. ここで, 以下の定義を使った.

$$\mathcal{D}_{\alpha\mu x,\beta\nu y} = \eta_{\mu\nu}\ \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial y_\lambda}\ \delta^4(x-y)\,\delta_{\alpha\beta}$$
$$- \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\ \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial y^\nu}\ \delta^4(x-y)\,\delta_{\alpha\beta} \ + \ [\epsilon\ 項]$$
$$= (2\pi)^{-4}\delta_{\alpha\beta}\int d^4p \left[\eta_{\mu\nu}(p^2 - i\epsilon) - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) p_\mu p_\nu \right]$$
$$\times e^{ip\cdot(x-y)}\ .$$

角括弧の中の行列の逆をとって, プロパゲーターが以下のように求まる.

$$\Delta_{\alpha\mu,\beta\nu}(x,y) = (\mathcal{D}^{-1})_{\alpha\mu x,\beta\nu y}$$
$$= (2\pi)^{-4}\int d^4p \left[\eta_{\mu\nu} + (\xi - 1)\frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right]\ \frac{e^{ip\cdot(x-y)}}{p^2 - i\,\epsilon}\ . \tag{15.5.25}$$

ここで $\xi = 0$ ととればランダウ・ゲージが, $\xi = 1$ をとればファインマン・ゲージが得られる. したがって, このゲージはそれらの一般化になっている. $\xi \to 0$ では, (15.5.22) の汎関数は $f_\alpha = 0$ の近傍を除いて非常に早く振動する. したがって, この汎関数はランダウ・ゲージ条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ を課すデルタ関数のように振舞い, 当然ながら, それに対応する $\partial^\mu \Delta_{\alpha\mu,\beta\nu} = 0$ という条件を満たすプロパゲーターを与える. ξ がゼロでないときは, 汎関数 $B[f]$ は場 $A_{\alpha\mu}$ に関する特定のゲージ条

件を選ばない. しかし, 通常, プロパゲーター (15.5.25) を「一般化したファインマン・ゲージ」もしくは,「一般化した ξ ゲージ」と呼ぶ. ξ を任意にしたまま物理的振幅を計算し, 最後の結果が ξ に依存しないことをチェックするのは, しばしば良い技法だ.

一つの点を除いて, ファインマン則はこの時点で明らかだ. 頂点は, 元のラグランジアン $\mathcal{L}$ の相互作用項から読み取れ, ゲージ場のプロパゲーターは (15.5.25) で与えられ, 物質場のプロパゲーターは以前と同様に計算できる. より詳しく述べるならば, $\mathcal{L}$ の 3 次相互作用項,

$$-\tfrac{1}{2}\, C_{\alpha\beta\gamma}(\partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu})A_\beta{}^\mu A_\gamma{}^\nu$$

はベクトル・ボソンの線が 3 本付いた頂点に対応する. その 3 本の線が (入射) 運動量 p, q, k を持ち, ローレンツとゲージ場の添字が $\mu\alpha, \nu\beta, \rho\gamma$ であるとすると, 運動量空間でのファインマン則から, その頂点の被積分関数への寄与は, 以下となる.

$$\begin{aligned} &i(2\pi)^4\delta^4(p+q+k)\,[-i\,C_{\alpha\beta\gamma}] \\ &\times\Big[p_\nu\eta_{\mu\lambda} - p_\lambda\eta_{\mu\nu} + q_\lambda\eta_{\nu\mu} - q_\mu\eta_{\nu\lambda} + k_\mu\eta_{\lambda\nu} - k_\nu\eta_{\lambda\mu}\Big]\,. \end{aligned} \tag{15.5.26}$$

また, $\mathcal{L}$ の A^4 の相互作用項,

$$-\tfrac{1}{4}\, C_{\epsilon\alpha\beta}C_{\epsilon\gamma\delta}\, A_{\alpha\mu}A_{\beta\nu}A_\gamma{}^\mu A_\delta{}^\nu$$

はベクトル・ボソンの線が 4 本付いた頂点に対応する. これらの線が (入射) 運動量 p, q, k, ℓ, を持ち, ローレンツとゲージ場の添字 $\mu\alpha, \nu\beta, \rho\gamma, \sigma\delta$ を持つとすると, その頂点の被積分関数への寄与は, 以下で与えられる.

$$\begin{aligned} &i(2\pi)^4\delta^4(p+q+k+\ell)\ \times\ \Big[-C_{\epsilon\alpha\beta}\,C_{\epsilon\gamma\delta}(\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}) \\ &-C_{\epsilon\alpha\gamma}\,C_{\epsilon\delta\beta}(\eta_{\mu\sigma}\eta_{\rho\nu} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\sigma\rho}) - C_{\epsilon\alpha\delta}\,C_{\epsilon\beta\gamma}(\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\rho}\eta_{\sigma\nu})\Big]\,. \end{aligned} \tag{15.5.27}$$

(構造定数 $C_{\alpha\beta\gamma}$ は結合定数の因子を含んでいた. このため, 因子 (15.5.26) と (15.5.27) はそれぞれ結合定数について 1 次と 2 次になる.)

ファインマン則でまだ取り扱っていない一つの複雑な点は, (15.5.21) に因子 Det $\mathcal{F}$ があり, 一般のゲージでは定数ではないということだ. ここで, この因子の考察に移る.

15.6 ゴースト

非可換ゲージ理論での (15.5.22) の因子 Det $\mathcal{F}$ のファインマン則への影響を調べる. この影響をファインマン則の変更として扱えるようにするために, 9.5 節で示したように, 任意の行列 $\mathcal{F}_{\alpha x,\beta y}$ の行列式は, 以下の経路積分として表すことができることを思い出そう.

$$\text{Det}\,\mathcal{F} \propto \int \left[\prod_{\alpha,x} d\omega^*_\alpha(x)\right] \left[\prod_{\alpha,x} d\omega_\alpha(x)\right] \exp(iI_{GH})\,. \qquad (15.6.1)$$

ここで,

$$I_{GH} \equiv \int d^4x\, d^4y\, \omega^*_\alpha(x)\, \omega_\beta(y)\, \mathcal{F}_{\alpha x,\beta y} \qquad (15.6.2)$$

となっている. ここで, ω^*_α と ω_α は独立で反可換な古典的変数の組であり, 比例定数は場に依存しない. (ここで, Det $\mathcal{F}$ の因子を出すためには, ω_α と ω^*_α という場の変数をフェルミオン的なものとして選ばなければならない. もし, これらの場の変数をボソン的としていたら, (15.6.1) の経路積分は $(\text{Det}\,\mathcal{F})^{-1}$ に比例してしまう.) 場 ω^*_α と ω_α は必ずしも複素共役で関係している必要は無い. 実際, 15.7 節では, ある種の目的のためには ω^*_α と ω_α は独立な実の変数と仮定する必要があることを見る. 因子 Det $\mathcal{F}$ の影響は, 完全な有効ラグランジアンに $I_{GH}(\omega,\omega^*)$ を含み, 「場」ω と ω^* について積分することと完全に同じだ. つまり, 任意のゲージ固定汎関数 $f_\alpha(x)$ について, 以下のように

なる.

$$
\begin{aligned}
\langle T\{\mathcal{O}_A \cdots\}\rangle_V \;\propto\; & \int \left[\prod_{n,x} d\psi_n(x)\right] \left[\prod_{\alpha,\mu,x} dA_{\alpha\mu}(x)\right] \\
& \times \left[\prod_{\alpha,x} d\omega_\alpha(x)\, d\omega^*_\alpha(x)\right] \exp\Big(i\, I_{\rm MOD}[\psi, A, \omega, \omega^*]\Big)\, \mathcal{O}_A \cdots .
\end{aligned}
\tag{15.6.3}
$$

ここで, $I_{\rm MOD}$ は以下の変更された作用だ.

$$
I_{\rm MOD} = \int d^4x \left[\mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} f_\alpha f_\alpha\right] + I_{GH} . \tag{15.6.4}
$$

場 ω_α と ω^*_α は (少なくとも共変的なゲージでは) ローレンツ・スカラーだが, フェルミ統計を満たす. しかし, ここでスピンと統計の関係が実際に破れているわけではない. これは, これらの場で表される粒子は始状態と終状態には現れることができないからだ. このため, ω_α と ω^*_α は「ゴースト」の場と「反ゴースト」との場と呼ばれる. (15.6.2) を見ると, 作用は「ゴースト数」として知られる量を保存することがわかる. この量は, ω_α について $+1$, ω^*_α について -1, 他の全ての場についてゼロと定義される.

「行列」$\mathcal{F}$ が, 場に依存せず結合定数についてゼロ次の量 $\mathcal{F}_0$ と, 場に依存し幾つかの結合定数の因子に比例する $\mathcal{F}_1$ とから,

$$
\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_1 \tag{15.6.5}
$$

とできているときには, ゴーストのファインマン則は最も単純だ. この場合には, ゴースト・プロパゲーターは単に,

$$
\Delta_{\alpha\beta}(x,y) = -(\mathcal{F}_0^{-1})_{\alpha x,\beta y} \tag{15.6.6}
$$

となり, ゴーストの頂点は相互作用項,

$$
I'_{GH} = \int d^4x\, d^4y\; \omega^*_\alpha(x)\, \omega_\beta(y) (\mathcal{F}_1)_{\alpha x,\beta y} \tag{15.6.7}
$$

から読み取ることができる.

たとえば, 前の節で論じた一般化された ξ ゲージでは,

$$f_\alpha = \partial_\mu A^\mu_\alpha \tag{15.6.8}$$

となっていた. 微小ゲージパラメータを λ_α とすると, (15.1.9) は以下を与える.

$$A^\mu_{\alpha\lambda} = A^\mu_\alpha + \partial^\mu \lambda_\alpha + C_{\alpha\gamma\beta}\lambda_\beta A^\mu_\gamma \,.$$

したがって,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\alpha x,\beta y} &= \left.\frac{\delta \partial_\mu A^\mu_{\alpha\lambda}(x)}{\delta\lambda_\beta(y)}\right|_{\lambda=0} \\ &= \Box\, \delta^4(x-y) + C_{\alpha\gamma\beta}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[A^\mu_\gamma(x)\, \delta^4(x-y)\right]\end{aligned} \tag{15.6.9}$$

となる. これは (15.6.5) の形になっていて,

$$(\mathcal{F}_0)_{\alpha x,\beta y} = \Box\delta^4(x-y)\, \delta_{\alpha\beta} \,, \tag{15.6.10}$$

$$(\mathcal{F}_1)_{\alpha x,\beta y} = -C_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[A^\mu_\gamma(x)\delta^4(x-y)\right] \tag{15.6.11}$$

だ. (15.6.6) と (15.6.10) とから, ゴースト・プロパゲーターは,

$$\Delta_{\alpha\beta}(x,y) = \delta_{\alpha\beta}(2\pi)^{-4}\int d^4p\, (p^2 - i\epsilon)^{-1}\, e^{ip\cdot(x-y)} \tag{15.6.12}$$

であることがわかる. したがって, このゲージでは, ゴーストは質量がゼロでスピンが無く, ゲージ群の随伴表現のように変換するフェルミオンのように振舞う. (15.6.7) と (15.6.11) を使い, 部分積分をすると, 作用のゴースト相互作用項が,

$$I'_{\rm GH} = \int d^4x\, C_{\alpha\beta\gamma}\,\frac{\partial\omega^*_\alpha}{\partial x^\mu}\, A^\mu_\gamma\, \omega_\beta \tag{15.6.13}$$

となることがわかる. この相互作用は, 出ていくゴーストの線が 1 本, 入ってくるゴーストの線が 1 本, ベクトル・ボソンの線が 1 本付いて

いる頂点に対応する. これらの線がそれぞれ (入射) 運動量 p, q, k を持ち, ゲージ群の添字が α, β, γ であり, ゲージ場のベクトルの添字が μ ならば, 運動用空間でのファインマン則より, そのような頂点の被積分関数への寄与は以下で与えられる.

$$i(2\pi)^4\delta^4(p+q+k)\ \times\ ip_\mu C_{\alpha\beta\gamma}\,. \tag{15.6.14}$$

ゴーストはループを回り, そのループ上の各頂点にはベクトル・ボソンの線が1本ずつ付く. 各ループには通常のフェルミオン場の変数と同じく, 余分のマイナスの符号が付く.

ゴースト・ループに付く余分のマイナス符号は, それぞれのゴースト場 ω_α とそれに伴う反ゴースト場 ω^*_α が何か, 負の自由度を表すものだということを示唆する. これらの負の自由度は, 共変ゲージ場のプロパゲーターでは勘定が重複していることから必要となっている. 物理的自由度は $A^\mu_\alpha(x)$ の成分から, ゲージ変換を表すのに必要なパラメータ $\Lambda_\alpha(x)$ を除いたものだからだ.

まとめると, 変更した作用 (15.6.4),

$$I_{\rm MOD} = \int d^4x\,\mathcal{L}_{\rm MOD} \tag{15.6.15}$$

の変更したラグランジアン密度は, 一般的な ξ ゲージで,

$$\mathcal{L}_{\rm MOD} = \mathcal{L}_{\rm M} - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}_\alpha F_{\alpha\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}\,(\partial_\mu A^\mu_\alpha)(\partial_\nu A^\nu_\alpha)$$
$$-\partial_\mu\omega^*_\alpha\,\partial^\mu\omega_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma}(\partial_\mu\omega^*_\alpha)\,A^\mu_\gamma\,\omega_\beta \tag{15.6.16}$$

となる. このラグランジアンは, その各項が場と場の微分の積の (質量の冪でみた) 次元が全部で4以下だという基本的な意味で, (もし物質場のラグランジアン $\mathcal{L}_{\rm M}$ がくりこみ可能なら) くりこみ可能なことが重要だ. ((15.6.16) の運動項 $-\partial_\mu\omega^*_\alpha\,\partial^\mu\omega_\alpha$ から, 場 ω と ω^* の次元は, 通常のスカラー場やゲージ場と同じ質量の1次と決まる.) しかし,

くりこみ可能性には次数勘定以上のものが要求される. それは, 全ての発散を吸収するのに必要な相殺項がなければならないということだ. 次の節では驚くべき対称性について述べる. 17.2 節でそれを使い, 非可換ゲージ理論が実際にこの意味でくりこみ可能であり, これまで使ってきたファデーフ・ポポフ・ド・ウィット方式に取って代るものでさえあることを示す.

15.7 BRST 対称性

前の 2 節で述べたファデーフ・ポポフ・ド・ウィット方式は理論のローレンツ不変性を明白にするが, ゲージの選び方に依存し, その結果本来理論が持っていたゲージ不変性を当然隠すことになる. これは, 理論のくりこみ可能性を証明しようとするときに深刻な問題となる. ゲージ不変性はラグランジアンで紫外発散を吸収するための相殺項として可能な項の形を制限する. しかし, 一旦ゲージを選んでしまえば, 無限大が現れる仕方を依然としてゲージ不変性が制限していることをどうやって知ることができるだろうか?

しかしながら, 驚くべきことに, ゲージを選んだ後でさえ, 経路積分はゲージ不変性に関係した対称性を依然として持っている. この対称性は, ファデーフ・ポポフ・ド・ウィットの仕事から数年経って, ベッキ, ルーエ, ストラ (Becchi, Rouet, Stora)[10] (また, それとは独立にトゥティン (Tyutin)[11]) によって 1975 年に発見され, その発見者を称えて, BRST 対称性と呼ばれている. この対称性はファデーフ・ポポフ・ド・ウィットの方法の副産物として本来発見された形に近い方式で述べるが, ファデーフ・ポポフ・ド・ウィットの方法の代替物として見なすこともできる.

(15.6.3) と (15.6.4) では非可換ゲージ理論のファインマン則は, 物質場, ゲージ場, ゴースト場が以下の変更された作用をもつ理論の経

路積分から得られることを見た.

$$I_{\text{MOD}} = I_{\text{EFF}} + I_{GH} = \int d^4x\, \mathcal{L}_{\text{MOD}}\ , \tag{15.7.1}$$

$$\mathcal{L}_{\text{MOD}} \equiv \mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} f_\alpha f_\alpha + \omega^*_\alpha \Delta_\alpha\ . \tag{15.7.2}$$

ここで, 以下の量を導入した.

$$\Delta_\alpha(x) \equiv \int d^4y\, \mathcal{F}_{\alpha x, \beta y}[A, \psi]\, \omega_\beta(y)\ . \tag{15.7.3}$$

これは, (15.5.21) でゲージ固定汎関数を,

$$B[f] \propto \exp\left(-\frac{i}{2\xi}\int d^4x\, f_\alpha f_\alpha\right) \tag{15.7.4}$$

と選んだときのものだ. 我々の目的のためには, 以下のように $B[f]$ をフーリエ積分に書き換えると便利だ.

$$B[f] = \int \left[\prod_{\alpha, x} dh_\alpha(x)\right] \exp\left[\frac{i\xi}{2}\int d^4x\, h_\alpha h_\alpha\right] \exp\left[i\int d^4x\, f_\alpha h_\alpha\right]\ . \tag{15.7.5}$$

こうしておくと, 経路積分は場 h_α (この場はしばしば「中西・ロートラップ (Lautrup) 場[11a]として知られている), ゲージ場, ゴースト場, 反ゴースト場について, 以下の新しい変更を受けた作用を使って実行しなければならない.

$$I_{\text{NEW}} = \int d^4x\, \left(\mathcal{L} + \omega^*_\alpha \Delta_\alpha + h_\alpha f_\alpha + \tfrac{1}{2}\,\xi h_\alpha h_\alpha\right)\ . \tag{15.7.6}$$

この変更を受けた作用はゲージ不変ではない. 実際, これが経路積分で使えるためには, ゲージ不変であっては困る. しかし, これは, 「BRST」対称性変換のもとで不変だ. それは, ω_α, ω^*_α および全てのフェルミオン的な物質場と反可換な微小定数 θ をパラメータとする以下の変換だ.

$$\delta_\theta \psi = i t_\alpha \theta \omega_\alpha \psi\ , \tag{15.7.7}$$

$$\delta_\theta A_{\alpha\mu} = \theta D_\mu \omega_\alpha = \theta[\partial_\mu \omega_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} \omega_\gamma] \,, \tag{15.7.8}$$

$$\delta_\theta \omega^*_\alpha = -\theta h_\alpha \,, \tag{15.7.9}$$

$$\delta_\theta \omega_\alpha = -\tfrac{1}{2}\, \theta\, C_{\alpha\beta\gamma} \omega_\beta \omega_\gamma \,, \tag{15.7.10}$$

$$\delta_\theta h_\alpha = 0 \,. \tag{15.7.11}$$

(フェルミオン的な経路積分では, ω_α と ω^*_α に何の関係も無い. したがって, (15.7.9) は (15.7.10) の共役である必要は無い.) h_α は BRST 不変だから, もし欲すれば, (15.7.5) のガウス因子 $\exp(\frac{1}{2} i\xi \int h_\alpha h_\alpha)$ を作用の BRST 不変性に影響せずに, h_α の滑らかな任意の関数に置き換え任意の汎関数 $B[f]$ を得ることができる. しかし, ダイアグラムを使った計算とくりこみのためには, $B[f]$ をガウス型のままに置いておく方がよい.

作用 (15.7.1) の不変性を確認するには, まず変換 (15.7.7)–(15.7.11) がベキ零 (nilpotent) であることに着目するとよい. つまり, F を ψ, A, ω, ω^*, h の任意の関数として, sF を 以下で定義する.

$$\delta_\theta F \equiv \theta s F \,. \tag{15.7.12}$$

このとき,*

$$\delta_\theta (sF) = 0 \tag{15.7.13}$$

となる. また, これと同等だが以下のようにも書ける.

$$s(sF) = 0 \,. \tag{15.7.14}$$

このベキ零性を確認するのは, δ_θ が一つの場に働くときには簡単だ. まず, 物質場に働くと,

$$\begin{aligned}\delta_\theta s\psi = it_\alpha\, \delta_\theta(\omega_\alpha \psi) &= -\tfrac{1}{2} i\, C_{\alpha\beta\gamma} t_\alpha \theta \omega_\beta \omega_\gamma \psi - t_\alpha t_\beta \omega_\alpha \theta \omega_\beta \psi \\ &= -\tfrac{1}{2}\, i\, C_{\alpha\beta\gamma} t_\alpha \theta \omega_\beta \omega_\gamma \psi + t_\alpha t_\beta \theta \omega_\alpha \omega_\beta \psi\end{aligned}$$

---

*BRST 対称性の原論文では, 汎関数 $B[f]$ は (15.7.4) のままにしておき, (15.7.9) で h_α を $-f_\alpha/\xi$ で置き換えた. そうすると, BRST 変換は, ω_α とゲージ場, 物質場の関数で, ω^*_α に依存しないものに働いたときにのみベキ零だ.

となる. 右辺の第 2 項の積 $\omega_\alpha\omega_\beta$ は α と β について反対称だから, この項の $t_\alpha t_\beta$ を $\frac{1}{2}[t_\alpha, t_\beta]$ に置き換えることができ, この項は第 1 項を打ち消す.

$$ss\psi = 0\,. \tag{15.7.15}$$

次に, ゲージ場に作用すると以下のようになる.

$$\begin{aligned}
\delta_\theta s A_{\alpha\mu} &= \delta_\theta D_\mu \omega_\alpha \\
&= \partial_\mu \delta_\theta \omega_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma}\delta_\theta A_{\beta\mu}\omega_\gamma + C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}\delta_\theta\omega_\gamma \\
&= \theta\Big(-\tfrac{1}{2}C_{\alpha\beta\gamma}\partial_\mu(\omega_\beta\omega_\gamma) + C_{\alpha\beta\gamma}(\partial_\mu\omega_\beta)\omega_\gamma \\
&\quad + C_{\alpha\beta\gamma}C_{\beta\delta\epsilon}A_{\delta\mu}\omega_\epsilon\omega_\gamma - \tfrac{1}{2}C_{\alpha\beta\gamma}C_{\gamma\delta\epsilon}A_{\beta\mu}\omega_\delta\omega_\epsilon\Big) \\
&= \theta\Big(\tfrac{1}{2}C_{\alpha\beta\gamma}(\partial_\mu\omega_\beta)\omega_\gamma + \tfrac{1}{2}C_{\alpha\beta\gamma}(\partial_\mu\omega_\gamma)\omega_\beta \\
&\quad - C_{\alpha\beta\gamma}C_{\gamma\delta\epsilon}A_{\delta\mu}\omega_\epsilon\omega_\beta - \tfrac{1}{2}C_{\alpha\beta\gamma}C_{\gamma\delta\epsilon}A_{\beta\mu}\omega_\delta\omega_\epsilon\Big)\,.
\end{aligned}$$

最後の表式の最初の 2 項は $C_{\alpha\beta\gamma}$ が β と γ について反対称なので打ち消し合う. 第 3 項と第 4 項はヤコビ恒等式 (15.1.5) により打ち消し合うので, 結局,

$$ssA_{\alpha\mu} = 0 \tag{15.7.16}$$

となる. (15.7.9) と (15.7.11) からすぐに,

$$ss\omega^*_\alpha = 0 \tag{15.7.17}$$

と

$$ssh_\alpha = 0 \tag{15.7.18}$$

が成立する. 最後に, 以下が成立する.

$$\begin{aligned}
\delta_\theta s\omega_\alpha &= -\tfrac{1}{2}C_{\alpha\beta\gamma}\delta_\theta(\omega_\beta\omega_\gamma) \\
&= \tfrac{1}{4}\theta\,\Big(C_{\alpha\beta\gamma}C_{\beta\delta\epsilon}\,\omega_\delta\omega_\epsilon\omega_\gamma - C_{\alpha\beta\gamma}C_{\gamma\delta\epsilon}\,\omega_\beta\omega_\delta\omega_\epsilon\Big) \\
&= -\tfrac{1}{2}\theta\,C_{\alpha\beta\gamma}C_{\gamma\delta\epsilon}\omega_\delta\omega_\epsilon\omega_\beta\,.
\end{aligned}$$

しかし, $\omega_\beta\omega_\delta\omega_\epsilon$ は反対称なので, ヤコビ恒等式 (15.1.5) よりこれもゼロとなる.

$$ss\omega_\alpha = 0\,. \qquad (15.7.19)$$

さて, 二つの場 ϕ_1 と ϕ_2 の積を考える. これらの場のどちらか, または両方とも ψ, A, ω, ω^*, h でもよい. また, 必ずしも時空の同じ点の場ではなくてもよい. このとき,

$$\delta_\theta(\phi_1\phi_2) = \theta(s\phi_1)\phi_2 + \phi_1\theta(s\phi_2) = \theta\Big[(s\phi_1)\phi_2 \pm \phi_1 s\phi_2\Big]$$

が成立する. ここで, 符号 $\pm$ はもし ϕ_1 がボソン的ならばプラスであり, ϕ_1 がフェルミオン的ならばマイナスだ. つまり,

$$s(\phi_1\phi_2) = (s\phi_1)\phi_2 \pm \phi_1 s\phi_2$$

となる. $\delta_\theta(s\phi_1) = \delta_\theta(s\phi_2) = 0$ であることを見たので, $s(\phi_1\phi_2)$ に対する BRST 変換の影響は,

$$\delta_\theta s(\phi_1\phi_2) = (s\phi_1)\theta(s\phi_2) \pm \theta(s\phi_1)(s\phi_2)$$

であることがわかる. しかし, $s\phi$ は ϕ と反対の統計性を持つので, 右辺の第 1 項で θ を左に移すと, 符号 $\mp$ が生じる.

$$\delta_\theta s(\phi_1\phi_2) = \theta\Big[\mp(s\phi_1)(s\phi_2) \pm (s\phi_1)(s\phi_2)\Big] = 0\,.$$

このように続けていくと, BRST 変換が, 任意の時空の点の場の任意の積に作用したときにベキ零であることがわかる.

$$\delta_\theta\, s(\phi_1\phi_2\phi_3\cdots) = 0\,.$$

任意の汎関数 $F[\phi]$ はそのような積に c 数の係数を掛けて多重積分した項の和として書けるから,

$$\delta_\theta\, sF[\phi] = \theta ssF[\phi] = 0 \qquad (15.7.20)$$

が同様に成立する. これで, BRST 変換のベキ零性が証明できた.

さて, 作用 (15.7.6) の BRST 不変性の確認に戻ろう. まず, 物質場とゲージ場のみの任意の汎関数に対しては, BRST 変換は,

$$\lambda_\alpha(x) = \theta\omega_\alpha(x) \tag{15.7.21}$$

を微小パラメータとするゲージ変換になっていることに着目する. したがって, (15.7.6) の第 1 項は自動的に BRST 不変だ.

$$\delta_\theta \int d^4x\, \mathcal{L} = 0\,. \tag{15.7.22}$$

作用 (15.7.6) の残りの部分に対する BRST 変換の影響を計算するには, そのゲージ固定関数への影響は, 単にゲージ変換 (15.7.21) の影響と同じだから,

$$\begin{aligned}\delta_\theta f_\alpha[x;A,\psi] &= \int \left.\frac{\delta f_\alpha[x;A_\lambda,\psi_\lambda]}{\delta\lambda^\beta(y)}\right|_{\lambda=0} \theta\,\omega_\beta(y)\,d^4y \\ &= \theta\int \mathcal{F}_{\alpha x,\beta y}[A,\psi]\,\omega_\beta(y)\,d^4y\end{aligned}$$

となり, (15.7.3) の量を使うと, 以下のように書けることに注目する.

$$\delta_\theta f_\alpha[x;A,\psi] = \theta\Delta_\alpha(x;A,\psi,\omega)\,. \tag{15.7.23}$$

($\mathcal{F}$ はボソン的な量だから, ここで θ を左に動かしても符号の変化は無い.) また, $\delta_\theta\omega^*_\alpha = -\theta h_\alpha$ と $\delta_\theta h_\alpha = 0$ が成立する. したがって, 「新しい」作用 (15.7.6) の被積分関数で $\mathcal{L}$ を除く項は, 以下のように書ける.

$$\omega^*_\alpha\Delta_\alpha + h_\alpha f_\alpha + \tfrac{1}{2}\xi h_\alpha h_\alpha = s\Big(\omega^*_\alpha f_\alpha + \tfrac{1}{2}\xi\omega^*_\alpha h_\alpha\Big)\,. \tag{15.7.24}$$

これは, 書き換えると,

$$I_{\text{NEW}} = \int d^4x\, \mathcal{L} + s\Psi \tag{15.7.25}$$

となる. ここで,

$$\Psi \equiv -\int d^4x\,(\omega^*_\alpha f_\alpha + \tfrac{1}{2}\xi\omega^*_\alpha h_\alpha) \qquad (15.7.26)$$

だ. BRST 変換のベキ零性から, すぐに $s\Psi$ は $\int d^4x\,\mathcal{L}$ と同様に BRST 不変なことがわかる.

ある意味でこの結果の逆も成り立つ. 17.2 節で見るように, BRST 不変性と (15.7.25) のラグランジアンの他の不変性を持ちくりこみ可能なラグランジアンは, 様々な定数係数の違いを除いては (15.7.25) の形をとらなければならない. しかし, それはこれらの理論のくりこみ可能性を証明するには充分ではない. BRST 対称性変換は場に非線形に働くので, ラグランジアンの対称性と行列要素やグリーン関数の対称性との間に単純な関係は無い. 次の章で論じる外場の方法を使えば, 17.2 節で示すようにファインマン振幅の紫外発散項 (有限部分はだめだが) が一種のくりこまれた BRST 不変性を満たし, それによりくりこみ可能性の証明ができることがわかる.

(15.7.25) からどんなゲージ理論の物理的内容も BRST 演算子の核 (つまり一般的な BRST 不変項 $\int d^4x\,\mathcal{L} + s\Psi$) から BRST 変換の像 (つまり $s\Psi$ の形の項) を引き去ったものに含まれていることが示せる. 任意のベキ零変換の核からその像を引き去ったものをその変換のコホモロジー (cohomology) と呼ぶ. ゲージ理論の物理的内容が BRST 演算子のコホモロジーであることには別の意味もある.[12] 物理的な状態間の行列要素がゲージ固定関数 f_α, つまり (15.7.25) に現れる汎関数 Ψ に依らないことは基本的な要請だ. Ψ が $\tilde{\delta}\Psi$ に変化したときの任意の行列要素 $\langle\alpha|\beta\rangle$ の変化は,

$$\tilde{\delta}\langle\alpha|\beta\rangle = i\langle\alpha|\tilde{\delta}I_{\text{NEW}}|\beta\rangle = i\langle\alpha|s\tilde{\delta}\Psi|\beta\rangle \qquad (15.7.27)$$

で与えられる. (ここでゲージ固定関数の任意の変化と BRST 変換やゲージ変換を区別するためにチルダ (˜) を使った.) フェルミオン的

な BRST「電荷」Q を, 任意の場の演算子 Φ に対して,

$$\delta_\theta \Phi = i[\theta Q, \Phi] = i\theta\,[Q, \Phi]_\mp$$

という表式で定義する. これは, 書き換えると,

$$i[Q, \Phi]_\mp = s\Phi \tag{15.7.28}$$

だ. ここで, Φ がボソン的かフェルミオン的かに応じて符号は $-$ か $+$ をとる. BRST 変換のベキ零性から,

$$0 = -ss\Phi = [Q, [Q, \Phi]_\mp]_\pm = [Q^2, \Phi]_-$$

となる. これが全ての演算子 Φ について成立するには, Q^2 がゼロとなるか, 単位演算子に比例しなければならない. しかし, Q^2 はゴースト量子数がゼロでないので, 単位演算子に比例することはできない.** したがって, それはゼロでなければならない.

$$Q^2 = 0\,. \tag{15.7.29}$$

(15.7.27) と (15.7.28) から,

$$\tilde{\delta}\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\alpha|[Q, \tilde{\delta}\Psi]|\beta\rangle \tag{15.7.30}$$

が得られる. これが Ψ の任意の変化 $\tilde{\delta}\Psi$ についてゼロとなるには,

$$\langle\alpha|Q = Q|\beta\rangle = 0 \tag{15.7.31}$$

が成立する必要がある. したがって, 物理的な状態はベキ零の演算子 Q の核となっている. Q の像, つまり $Q|\cdots\rangle$ の形の状態だけ異なる二つの物理的状態は, 明らかに他の全ての物理的状態との行列要素が同

**ゴースト量子数は ω_α に対して $+1$, ω_α^* に対して -1, 全てのゲージ場と物質場に対しては 0 と定義されていた.

じであり, したがって, 物理的に同等だ. ゆえに, 独立な物理的状態は, Q の核から Q の像を引き去ったもの, つまり, Q のコホモロジーに相当する.

これが実際にどう働くかを見るために, 純粋な電磁理論という簡単な例を考えよう.[†] ゲージ固定関数を $f = \partial_\mu A^\mu$ とし, 補助場 h について積分すると, BRST 変換 (15.7.8)-(15.7.10) はここでは,

$$s\,A_\mu = \partial_\mu \omega\,, \qquad s\,\omega^* = \partial_\mu A^\mu/\xi\,, \qquad s\,\omega = 0 \tag{15.7.32}$$

となる. 場を以下のように正規モードで展開する.[††]

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= (2\pi)^{-3/2}\int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}}\left[a^\mu(\mathbf{p})\,e^{ip\cdot x} + a^{\mu *}(\mathbf{p})\,e^{-ip\cdot x}\right]\,, \\ \omega(x) &= (2\pi)^{-3/2}\int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}}\left[c(\mathbf{p})\,e^{ip\cdot x} + c^*(\mathbf{p})\,e^{-ip\cdot x}\right]\,, \\ \omega^*(x) &= (2\pi)^{-3/2}\int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}}\left[b(\mathbf{p})\,e^{ip\cdot x} + b^*(\mathbf{p})\,e^{-ip\cdot x}\right]\,. \end{aligned} \tag{15.7.33}$$

(15.7.28) の両辺の $e^{\pm ip\cdot x}$ の係数を等しくすると以下を得る.

$$\begin{aligned} &[Q, a^\mu(\mathbf{p})]_- = -p^\mu c(\mathbf{p})\,, \quad [Q, a^{\mu *}(\mathbf{p})]_- = p^\mu c^*(\mathbf{p})\,, \\ &[Q, b(\mathbf{p})]_+ = p^\mu a_\mu(\mathbf{p})/\xi\,, \quad [Q, b^*(\mathbf{p})]_+ = p^\mu a^*_\mu(\mathbf{p})/\xi\,, \\ &[Q, c(\mathbf{p})]_+ = [Q, c^*(\mathbf{p})]_+ = 0\,. \end{aligned} \tag{15.7.34}$$

物理的条件 (15.7.31) を満たす任意の状態 $|\psi\rangle$ を考える.

$$Q|\psi\rangle = 0\,. \tag{15.7.35}$$

[†](15.6.11) と (15.6.7) から, 電磁理論では構造定数がゼロとなるために, ゴーストが他の場と結合しないことがわかる. それにもかかわらず, 電磁理論は BRST 対称性を使って物理的状態を決める良い例となっている. 実際, 「in」状態と「out」状態の物理的条件を解析する際には相互作用を無視するので, この目的のためには非可換ゲージ理論は量子電磁理論のコピーが幾つか集まったように扱える.

[††]$\omega^*(x)$ が $\omega(x)$ のエルミート共役と考えられないように, b^* と c^* も c と b の共役ではない. しかし, $A^\mu(x)$ はエルミートなので, Q がエルミートならば $\omega(x)$ もエルミートだ.

このとき, 光子を一つ加えた状態 $|e,\psi\rangle = e_\mu a^{\mu *}(\mathbf{p})|\psi\rangle$ は, もし $e_\mu p^\mu = 0$ ならば物理的条件 $Q|e,\psi\rangle = 0$ を満たす. また, 状態 $|\psi\rangle' \equiv b^*(\mathbf{p})|\psi\rangle$ は,

$$Q|\psi\rangle' = p^\mu a^*_\mu(\mathbf{p})|\psi\rangle/\xi \tag{15.7.36}$$

を満たすから, $|e+\alpha p,\psi\rangle = |e,\psi\rangle + \xi\alpha Q|\psi\rangle'$ であり, したがって物理的に $|e,\psi\rangle$ に同等だ. これから e^μ は物理的に $e^\mu + \alpha p^\mu$ に同等であることがわかるが, これは通常の光子の偏極ベクトルに対する「ゲージ不変性」条件だ. 一方,

$$Qb^*(\mathbf{p})|\psi\rangle = p^\mu a^*_\mu(\mathbf{p})|\psi\rangle \neq 0$$

が成立するから, $b^*|\psi\rangle$ は物理的条件 (15.7.31) を満たさない. また, $e\cdot p \neq 0$ を満たす任意の e_μ に対して,

$$c^*(\mathbf{p})|\psi\rangle = Qe_\mu a^{*\mu}(\mathbf{p})|\psi\rangle/e\cdot p$$

となるので, $c^*|\psi\rangle$ は BRST 変換について完全であり, したがって, ゼロと同等だ. したがって, 物理的ヒルベルト空間にはゴーストも反ゴーストも無い.

ローレンツ不変性を維持するには, $a^\mu(\mathbf{p})$ の四つの成分を全て,

$$0 = a_\mu(\mathbf{p})|0\rangle \tag{15.7.37}$$

の意味で消滅演算子と解釈しなければならない. ここで, $|0\rangle$ は BRST 不変な真空状態だ. しかし, BRST 不変な作用から導いた正準交換関係 (たとえば $\xi=1$ のときのもの) から, ファインマン・ゲージのプロパゲーターに対応して,

$$[a_\mu(\mathbf{p}), a^*_\nu(\mathbf{p}')]_- = \eta_{\mu\nu}\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \tag{15.7.38}$$

が成立する. (15.7.37) と (15.7.38) は,

$$\langle 0|a_0(\mathbf{p})\, a^*_0(\mathbf{p}')|0\rangle = -\langle 0|0\rangle \tag{15.7.39}$$

を導くので, これは通常の量子力学の正定値条件を破る.[13] しかしながら, 物理的状態の間の全ての振幅は通常の正定値条件を満たすことが保証されている. なぜなら, これらの状態は (15.7.31) を満たし, そのような状態については遷移振幅は, 正定値性やユニタリー性のような問題が無いクーロン・ゲージや軸性ゲージのような物理的なゲージでのものと同じになるからだ.

これまでに述べたファデーフ・ポポフ・ド・ウィット形式は必然的にゴースト場 ω^*_α と ω_α についての 2 次の作用を与える. これはゲージ固定関数 $f_\alpha = \partial_\mu A^\mu_\alpha$ を持つくりこみ可能なヤン・ミルズ理論には適切だが, より一般の場合にはそうではない. たとえば, 17.2 節で見るように, くりこみ可能なヤン・ミルズ理論は, 他のゲージでは 4 本のゴーストの外線をもつループ・ダイアグラムの紫外発散に対する相殺項としてラグランジアン密度に $\omega^*\omega^*\omega\omega$ の項を必要とする.

幸いなことにファデーフ・ポポフ・ド・ウィット形式は同じユニタリーな S 行列を与える同等なラグランジアンの類を生成するやり方の一つに過ぎない. BRST 形式はより一般的な理論形式であり, ファデーフ・ポポフ・ド・ウィット形式を全く必要としない. この形式では, 作用を, 物質場, ゲージ場, ω^A, ω^{*A}, h^A のもっとも一般的な局所汎関数で, ゴースト数はゼロであり, BRST 変換 (15.7.7)–(15.7.11) と理論の他の大域的対称性のもとで不変なものにとる. (くりこみ可能な理論では, ラグランジアン密度の各項の演算子の次元が 4 以下であるように限定するが, この制限は以下の議論には何の役割も果たさない.) 次の節では, より一般のヤン・ミルズ理論においてこの種のもっとも一般的な作用は物質場とゲージ場 (まとめて ϕ と書く) のみの汎関数と BRST 演算子 s をゴースト数 -1 の任意の汎関数 Ψ に作用させた項との和,

$$I_{\rm NEW}[\phi, \omega, \omega^*, h] = I_0[\phi] + s\,\Psi[\phi, \omega, \omega^*, h] \tag{15.7.40}$$

であることを示す. たとえば, ファデーフ・ポポフ・ド・ウィット形式での作用 (15.7.25) はこの形になっているが, もはや $s\Psi$ はゴースト場と反ゴースト場について双 1 次である必要は無い.

前と同じ議論により, BRST 生成子 Q によって消される状態間の S 行列要素は (15.7.40) の Ψ の選択に依らない. したがって, ある Ψ でゴーストが結合しないならば, 一般にゴーストは結合しない. ヤン・ミルズ理論ではそのような Ψ は軸性ゲージで理論を量子化すれば得られるので, そのような理論ではファデーフ・ポポフ・ド・ウィット形式で作られる (15.7.26) に限らず, 汎関数 $\Psi[\phi,\omega,\omega^*,h]$ をどのように選んでもゴーストは結合しない.

さらに進んで, 軸性ゲージのような非ローレンツ不変な正準量子化に全く依存せずにもできる. 前と同じように, 作用をゲージ場, 物質場, ω^A, ω^{*A}, h^A の汎関数で, ゴースト数がゼロであり, BRST 変換 (15.7.7)–(15.7.11) と理論のローレンツ不変性を含む他の大域的対称性のもとで不変であるものとする. 作用の BRST 不変性から, 保存されるベキ零の BRST 生成子 Q の存在がいえる. ゴースト場と反ゴースト場をエルミートとして扱うと, Q もまたエルミートとなる. 物理的状態の空間は, 上のように Q で消される状態で, そのうち Q を他の状態に施した結果分だけ異なる状態は同等として扱って得られる. ヤン・ミルズ理論では, この空間はゴーストも反ゴーストも無く, 正定値のノルムを持ち, この空間の S 行列はユニタリーであることが示されている.[13a]

この過程は **BRST 量子化** (BRST quantization) として知られている. これは一般相対論や弦理論のような他の局所対称性を持つ理論にも拡張されている. これまでのところ, 残念ながら, BRST コホモロジーがゴーストを持たず, この空間に働く S 行列がユニタリーだということはそれぞれの場合に個々に証明する必要がある. これらの証明の要は, ヤン・ミルズ理論のゲージ場の時間成分のような負のノルム

の各自由度に対し, その自由度を変換して消してしまう局所対称性が一つづつあるということだ.

* * *

ここでは使わないが, ゴーストと BRST 対称性には美しい幾何学的解釈[14]があるので, それを述べておく. ゲージ場 A^μ_α は 1 形式 $A_\alpha \equiv A_{\alpha\mu}dx^\mu$ として書ける. dx^μ は反可換な c 数の組だ (5.8 節を見よ). これをゴーストと一緒にして, 拡張された空間の 1 形式, $\mathcal{A}_\alpha \equiv A_\alpha + \omega_\alpha$ とできる. また, 通常の外微分, $d \equiv dx^\mu\, \partial/\partial x^\mu$ を BRST 演算子 s と一緒にして, この空間の外微分 $\mathcal{D} \equiv d + s$ を作ると, $s^2 = d^2 = sd + ds = 0$ によりベキ零となる.

次の章では外場の方法を導入し, それを 17 章で BRST 対称性と共に使い, 非可換ゲージ理論のくりこみ可能性の証明を完成する.

15.8 BRST 対称性の一般化*

前の節で述べた BRST 対称性は一般相対論と弦理論を含む広い範囲の理論の量子化について一般化でき, 有用だ. それら全ての場合を扱うために, 作用 $I[\phi]$ と測度 $[d\phi] \equiv \prod_r d\phi^r$ が以下の微小変換の組に対して不変であるとする.

$$\phi^r \to \phi^r + \epsilon^A \delta_A \phi^r \ . \tag{15.8.1}$$

これは, 簡略化した「ド・ウィット」記法を使っていて, r と A は時空の座標のみならず離散的な添字を含み, 和はこれらの座標に関する積分も含む. たとえば, ゲージ変換 (15.1.9) では, 添字 A は 群の添字 α と時空の座標 x を含み, $\epsilon^{\alpha x} \equiv \epsilon^\alpha(x)$ だ. また, 添字 r は群の添字 α と

---

*この節はこの本の議論の本筋からは多少外れているので, 最初読むときには飛ばしてもよい.

時空の座標 x のみならずベクトルの添字 μ も含み, $\phi^{\mu\,\alpha\,x} \equiv A^{\alpha}{}_{\mu}(x)$ となっている. (15.8.1) の記法では, 変換 (15.1.9) の変分 $\delta_A\phi^r$ は,

$$\delta_{\alpha\,y}\phi^{\mu\,\beta\,x} = \delta^{\beta}_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\delta^4(x-y) + C^{\beta}{}_{\gamma\,\alpha}\phi^{\mu\,\gamma\,x}\delta^4(x-y)$$

と書かれる. 前の節のヤン・ミルズ理論のような特別な場合と同様に, BRST 不変性はこれらの理論のファデーフ・ポポフ・ド・ウィット形式の代わりに使われ, ファデーフ・ポポフ・ド・ウィット形式が働かないところでも応用できるものだ. しかしながら, ここでは BRST 不変性の導入の動機として一般的な局所対称性を持つ理論のファデーフ・ポポフ・ド・ウィット形式から始め, その更なる一般化へと話を進める.

(15.5.21) を導くのに使われたのと同じ議論を辿って, 以下の一般化したファデーフ・ポポフ・ド・ウィット定理を得る.

$$\frac{C}{\Omega}\int[d\phi]\,e^{iI[\phi]}\,V[\phi] = \int[d\phi]\,e^{iI[\phi]}\,B[f[\phi]]\,\mathrm{Det}(\delta_A f_B[\phi])\,V[\phi]\,. \tag{15.8.2}$$

ここで $V[\phi]$ は ϕ^r の任意の汎関数であり, ゲージ変換 (15.8.1) のもとで不変だ. また, $f_A[\phi]$ は ϕ^r のゲージ固定汎関数の組であり, 「行列」$\delta_A f_B[\phi]$ の行列式がゼロでないように選ばれている. $B[f]$ は f_A のほぼ任意の汎関数 (たとえば, $\prod_A \delta(f_A)$) だ.** 定数 Ω は群の体積であり, 定数 C は ((15.5.19) のように) 以下で定義される.

$$C \equiv \int[df]\,B[f]\,. \tag{15.8.3}$$

すでに見たように, ゲージ理論では, (15.8.2) の重要性は右辺の積分がゲージ固定汎関数 f_A の選択に依らず, $B[f]$ には定数 C のみを通じ

**同じ A, B 等の文字を f_A とゲージ変分 δ_A を示すために使う. これはゲージ変換の数だけゲージ固定汎関数があることを強調するためだ. しかしながら, 弦理論のような幾つかの場合では, ゲージ固定汎関数 f^a の添字 a はゲージ変分 δ_A の添字 A と「同じ数」だけをとるが, その添字がとる値はきわめて異なるのが自然だ. 場に依存しない正則な c_{Aa} を使って $f_A = c_{Aa}f^a$ を定義できる限り, この形式に変更を加える必要は無い.

て依存することを示していることにある. 時空の有限個の格子点上のゲージ理論のように, 通常は無限大である群の体積 Ω に意味が与えられるときには, (15.8.2) も左辺の積分の表式として値を持つことができる.

ベキ零の BRST 変換を定義するには, まず, 汎関数 $B[f]$ を以下のフーリエ変換として表さなければならない.

$$B[f] = \int [dh] \ \exp(ih^A f_A)\,\mathcal{B}[h]\,. \tag{15.8.4}$$

ここで, $[dh] \equiv \prod_A dh^A$ だ. また, 行列式はフェルミオン的な c 数場 ω^{*A} と ω^A の積分として以下のように表さなければならない.[†]

$$\mathrm{Det}(\delta_A f_B[\phi]) \propto \int [d\omega^*]\,[d\omega] \ \exp\left(i\omega^{*B}\omega^A\delta_A f_B\right)\,. \tag{15.8.5}$$

ここで, $[d\omega^*] \equiv \prod_A d\omega^{*A}$ と $[d\omega] \equiv \prod_A d\omega^A$ であり, いつものように「$\propto$」は場に依存しない比例因子を持った比例関係を意味する. これらを (15.8.2) に代入すると, ゲージ固定をした経路積分の一般的表式が,

$$\begin{aligned}&\int [d\phi] \ \exp\left(iI[\phi]\right) B[f[\phi]]\,\mathrm{Det}(\delta_A f_B[\phi])\,V[\phi]\\&\quad\propto \int [d\phi]\,[dh]\,[d\omega^*]\,[d\omega] \ \exp\left(iI_{\mathrm{NEW}}[\phi,h,\omega,\omega^*]\right)\mathcal{B}[h]\ V[\phi]\end{aligned} \tag{15.8.6}$$

と得られる. ここで, I_{NEW} は新しい全作用,

$$I_{\mathrm{NEW}}[\phi,h,\omega,\omega^*] = I[\phi] + h^A f_A[\phi] + \omega^{*B}\omega^A\delta_A f_B[\phi] \tag{15.8.7}$$

だ.

15.6 節で述べたように, ゴースト場は, 経路積分では ϕ^r についてゲージ変換 (15.8.1) で関係したものも含めて積分しているので, それ

[†] 弦理論や他の理論では, ゴースト場 ω^{*A} と ω^A をそれぞれ b^A (または b_A) と c^A と書くのが普通だ.

を打ち消すために生じたものと考えることができる. ゴースト場はフェルミオンだから余分なマイナスの符号を持っていて, ゴースト・ループはゲージ変換で同等な ϕ についての積分を打ち消す. しかし, これがうまく働くには, 独立なゲージ変換の数だけゴースト場がなければならない. つまり, ω^A は独立だから, ゲージ変換 (15.8.1) は全て独立でなければならない. これはヤン・ミルズ理論のゲージ変換と一般相対論の座標変換では成立しているが, 常にそうとは限らない. 独立でないゲージ変換の有名な例は, 8.8 節で述べた p 形式ゲージ場だ. p 形式の (階数が p の反対称テンソル) A は $(p-1)$ 形式の ϕ を使ったゲージ変換 $A \to A + d\phi$ を受ける. ここで, $d\phi$ は外微分 (反対称化された微分) だ. d はベキ零なので, $p \geq 2$ のときはゲージ変換を変えることなく ϕ を $d\psi$ だけずらせる. したがって, $(p-2)$ 形式 ψ を変換のパラメータとするゲージ変換のゲージ変換とでもいえる変換のもとで不変性がある. そのような場合には, ゴーストが多すぎることの代償として, 「ゴーストのゴースト」[15] を導入しなければならない. $p \geq 3$ のときは, さらに「ゴーストのゴーストのゴースト」等々を導入しなければならない. 以下では, ゲージ変換 (15.8.1) は全て独立であり, ゴースト場 ω^A (と反ゴースト場 ω^{*A}) があれば足りるとする.

元の対称性 (15.8.1) は非ゲージ不変な汎関数 $B[f]$ によって破られているが, 新しい全作用は微小 BRST 変換,

$$\chi \to \chi + \theta s \chi \tag{15.8.8}$$

のもとで厳密に不変だ. ここで, χ は ϕ^r, ω^A, ω^{A*}, h^A のどれかであり, θ は微小反可換 c 数, s は以下の**スラブノフ演算子** (Slavnov operator) だ.

$$s = \omega^A \, \delta_A \phi^r \, \frac{\delta_L}{\delta \phi^r} - \frac{1}{2} \omega^B \omega^C \, f^A{}_{BC} \, \frac{\delta_L}{\delta \omega^A} - h^A \, \frac{\delta_L}{\delta \omega^{*A}} \,. \tag{15.8.9}$$

(15.8.9) では添字 L は, $\delta F = \delta\chi \, G$ ならば $\delta_L F / \delta\chi = G$ と定義された

左微分を意味する．また，${f^A}_{BC}$ は交換関係，

$$[\delta_B, \delta_C] = {f^A}_{BC}\delta_A \tag{15.8.10}$$

に現れる構造定数だ.[††] ${f^A}_{BC}$ は非可換ゲージ理論と弦理論では場に依存ないが，常にそうというわけではない．しかし，BRST 形式はその場合に限らない．計算を実行すると，以下を得る．

$$\begin{aligned} s^2 = \frac{1}{2}\omega^A\omega^B \left[\delta_A\phi^s \frac{\delta_L(\delta_B\phi^r)}{\delta\phi^s} - \delta_B\phi^s \frac{\delta_L(\delta_A\phi^r)}{\delta\phi^s} - {f^C}_{AB}\delta_C\phi^r\right] \frac{\delta_L}{\delta\phi^r} \\ -\frac{1}{2}\omega^B\omega^C\omega^D \left[{f^E}_{BC}{f^A}_{DE} + \delta_D\phi^r \frac{\delta_L {f^A}_{BC}}{\delta\phi^r}\right] \frac{\delta_L}{\delta\omega^A} \,. \end{aligned} \tag{15.8.11}$$

したがって，BRST 変換がベキ零だという条件は交換関係 (15.8.10) と無矛盾性条件，

$${f^E}_{[BC}\,{f^A}_{D]E} + \delta_{[D}\phi^r \left(\delta_L {f^A}_{BC]}/\delta\phi^r\right) = 0 \tag{15.8.12}$$

に同等だ．ここで，下添字の括弧はその中の添字 B, C, D についての反対称化を意味する．(15.8.12) は交換関係 (15.8.10) から通常のヤコビ恒等式と同じように導け，場に依存する構造定数を持つ対称性においてヤコビ恒等式の代りをするものだ．

(15.8.8) の変換が $I_{\rm NEW}$ の対称性になっていることを示すには，(θ が ω^{*A} と反可換であることを使い) (15.8.7) を以下のように書き換える．

$$I_{\rm NEW}[\phi, h, \omega, \omega^*] = I[\phi] - s(\omega^{*A}\, f_A)\,. \tag{15.8.13}$$

場 ϕ^r に対しては BRST 変換は ϵ^A を全ての ϕ^r と可換な $\theta\omega^A$ で置き換えた単なるゲージ変換 (15.8.1) だから，$I[\phi]$ の項は BRST 不変だ．$s\,(\omega^{*A}\, f_A)$ の項は，BRST 変換のベキ零性から BRST 不変となる．

[††] たとえば，物質場 $\psi(x)$ に働くゲージ変換については，$\delta_{\beta\, y}\psi(x) = it_\beta\psi(x)\delta^4(x-y)$ となるから，$\delta_{\beta\, y}\delta_{\gamma\, z}\psi(x) = -t_\gamma t_\beta\psi(x)\delta^4(x-y)\delta^4(x-z)$ だ．したがって，この場合には，${f^{\alpha\, x}}_{\beta\, y\; \gamma\, z} = {C^\alpha}_{\beta\,\gamma}\delta^4(x-y)\delta^4(x-z)$ となる．

幾つかの理由から, 単に (15.8.8) の BRST 変換の元で不変な, ファデーフ・ポポフ・ド・ウィット形式で構成されるよりは一般的な作用を考える必要がある. そのような作用が物理的に意味のある結果を与えることを示す最初のステップとして, もっとも一般的な BRST 不変でゴースト数がゼロの汎関数は, ϕ のみの汎関数と, BRST 演算子 s をゴースト数が -1 の任意の汎関数 Ψ に施して得られる項との和である, つまり,

$$I_{\rm NEW}[\phi,\omega,\omega^*,h]=I_0[\phi]+s\,\Psi[\phi,\omega,\omega^*,h] \tag{15.8.14}$$

という一般的な結果 (これはすでに前の節で使った) を証明する. これはたとえばファデーフ・ポポフ・ド・ウィット作用 (15.8.13) については成立している. 簡略化して述べれば, これは BRST コホモロジーが場 ϕ^r のみのゲージ不変汎関数 $I[\phi]$ だけからなるということを意味する.

(15.8.14) を証明するには, BRST 変換 (15.8.8)–(15.8.9) が場 h^A と ω^{*A} の数の合計を変えないことに着目する. これにより, I を場 h^A と ω^{*A} を合計 N 個含む項 I_N の和に展開すると, sI で異なる N の項同士の間に打ち消しはおこらず, 各項が個別に BRST 不変でなければならないということがわかる.

$$sI_N=0\,. \tag{15.8.15}$$

つぎに以下のホッジ (Hodge) 演算子と呼ばれるものを導入する.

$$t\equiv\omega^{*A}\frac{\delta}{\delta h^A}\,. \tag{15.8.16}$$

以下の反交換関係の証明は問題なくできる.

$$\{s,t\}=-\omega^{*A}\frac{\delta_L}{\delta\omega^{*A}}-h^A\frac{\delta}{\delta h^A}\,. \tag{15.8.17}$$

演算子 $\{s,t\}$ を I_N に作用させ, (15.8.15) を使うと,

$$stI_N=-NI_N \tag{15.8.18}$$

を得るので, I_0 を除く各 I_N は演算子 s を他のある汎関数に作用させたものとして書けるという意味で, BRST 完全だ. したがって, 完全な汎関数 I は,

$$\Psi = -\sum_{N=1}^{\infty} \frac{tI_N}{N} \tag{15.8.19}$$

として $I_0 + s\Psi$ という形に書ける. I_0 の項は定義により, ω^{*A} と h^A に依存しない. そのゴースト数はゼロだと仮定するから, ω^A にも依存しない. これで証明ができた.

物理的な行列要素がゲージ固定汎関数 Ψ の定義を変えても不変だということを示すには, フェルミオン的な「電荷」 Q を, 任意の演算子 Φ の BRST 変換のもとでの変化が,

$$\delta_\theta \Phi = i[\theta Q, \Phi] = i\theta\, [Q, \Phi]_\mp \tag{15.8.20}$$

と書けるように定義する. ここで, $[x,y]_\mp \equiv xy \mp yx$ の上と下の符号は, それぞれ, Φ がボソン的, フェルミオン的のときだ. 前の節と同様に BRST 変換のベキ零性により $Q^2 = 0$ となっている. 物理的状態の間のゲージ不変演算子の行列要素は, 物理的状態 $|\alpha\rangle$ と $\langle\beta|$ が,

$$Q|\alpha\rangle = \langle\beta|Q = 0 \tag{15.8.21}$$

を満たせば, またそのときに限り, Ψ の選び方に依らない. したがって, 物理的に区別できる状態は Q のコホモロジーの要素と一対一に対応する. したがって, ヤン・ミルズ理論の軸性ゲージのようにゴーストが他の場と結合しないある Ψ が見つかれば, 一般的な BRST 不変作用 (15.8.14) は任意の適切な Ψ で物理的に意味のある結果をもたらす. 軸性ゲージはローレンツ不変性を破るので実際の計算には不便だが, もし, このゴーストが無い Ψ が, 軸性ゲージがローレンツ不変性を破るので不便であったように実際の計算に不便なら, 任意のゲージ固定 Ψ を採用しても, ゴーストが始状態と終状態に無い S 行列がユニタリーだと保証されているので安心してよい.

このやり方は弦理論でもうまく働く. そこでは, いわゆる光円錐量子化が軸性ゲージの代りをする. しかし, 一般相対論のような他の理論では, ゴーストが結合しない座標系を選ぶのは不可能だ. そのような理論は, 前の節の終わりで述べた BRST 量子化の方法で取り扱い, BRST 不変性を使ってゴーストの無い物理的なヒルベルト空間での S 行列のユニタリー性を証明する.

「反 BRST 」対称性[18]のもとでの不変性の発見[17]により, その見かけにもかかわらず, ω^A と ω^{*A} の役割の類似性があることが示された. しかし, それにはまだ不可思議なところもある.

15.9　バタリン・ビルコビスキー形式*

この章ではバタリン・ビルコビスキー (Batalin–Vilkovisky) 形式[19]として広く知られている強力な理論形式について述べる. それはラグランジアン形式で発展したが, その源はハミルトニアン形式で導かれたバタリン・フラドキン・ビルコビスキー形式[20]にある. (その二つの方式は摂動的に同等であると証明されている.[21]) 17.1 節で見るように, 同じ形式はそれより早くジン・ジュスタン (Zinn-Justin)[22]によって, ゲージ理論のくりこみを取り扱うために導入された. この形式が欠かせないと分かっている点は最低三つある.

(i) これまでは, (15.8.10) の意味で閉じた代数を持つ既約対称性のみを考えてきた. (補助場無しの) 超重力[23]のような幾つかの理論では, 代数は閉じていない (開いている). つまり, 代数は場の方程式が満たされているときにのみ閉じていて, (15.8.10) には $\delta I/\delta\chi^n$ に比例する項が現れる. 同様な項はまた無矛盾性条件 (15.8.12) にも現れる. そうすると, そのような理論では (15.8.11) により s^2 はゼロとならず, 微

---

*この節はこの本の議論の本筋からは多少外れているので, 最初読むときには飛ばしてもよい.

分 $\delta I/\delta\chi^n$ の 1 次結合に等しくなる. この節で見るように, バタリン・ビルコビスキー形式は開いた, または既約でないゲージ対称性代数を含んだ非常に一般的なゲージ理論を扱える.

(ii) 上に述べたように, バタリン・ビルコビスキー形式の本質的なところは, 元はゲージ理論のくりこみを証明するためにジン・ジュスタンによって開発された. 17.1 節で説明する要となる点は, 外場のもとでは全ての 1 粒子既約なダイアグラムの和は元の作用の BRST 対称性に従わないが, マスター方程式として知られる作用の鍵となる性質を持っていることだ.

(iii) バタリン・ビルコビスキー形式は, 作用の対称性が量子効果で破れる可能性があるときにそれを解析する便利な方法となっている.

バタリン・ビルコビスキー形式の出発点は, 理論の場それぞれについて「反場」(antifield) を導入することにある. 場 ϕ^r, ω^A, ω^{*A}, h^A を χ^n で表すことにする. それぞれの χ^n に対し反外場 $\chi^\ddagger_n$ を導入する.** この反場は, BRST 変換された場 $s\chi^n$ と同じボソンかフェルミオンの統計性と, 反対のゴースト数とを持つ. つまり, $\chi^\ddagger_n$ は χ^n と反対の統計性と, χ^n のゴースト数を $\mathrm{gh}(\chi^n)$ としたとき, $-\mathrm{gh}(\chi^n)-1$ に等しいゴースト数とを持つ. ヤン・ミルズ理論や一般相対論などの最も単純な場合では, もとのゲージ不変作用 $I[\phi]$ には反場 $\chi^\ddagger_n$ と $s\chi^n$ が結合する項を以下のように加える.

$$S[\chi,\chi^\ddagger] \equiv I[\phi] + (s\chi^n)\,\chi^\ddagger_n\,. \tag{15.9.1}$$

この作用は, 以下の**マスター方程式** (master equation) と呼ばれるものを満たす.

$$0 = \frac{\delta_R S}{\delta\chi^\ddagger_n}\frac{\delta_L S}{\delta\chi^n}\,. \tag{15.9.2}$$

**通常の複素共役や荷電共役と無関係であることを示すために, 通常使う $*$ の代りに $\ddagger$ の記号を使う. 特に, 反ゴースト場 ω^{*A} は ω^A の反場 $\omega^\ddagger_A$ とは同じではない.

ここで,「R」と「L」は右と左の微分を意味する. これを確認するには, (15.9.2) の反場についてゼロ次の項は単にゲージ不変性条件を与えることに着目する.

$$0 = \left(s\phi^r\right)\frac{\delta_L I}{\delta\phi^r} = \omega^A\,\delta_A I[\phi]\,. \qquad (15.9.3)$$

また, 反場 $\chi^\ddagger_n$ について 1 次の項は, ベキ零性の条件を与える.

$$0 = \left(s\chi^m\right)\frac{\delta_L(s\chi^n)}{\delta\chi^m} = s^2\chi^n\,. \qquad (15.9.4)$$

$S[\chi,\chi^\ddagger]$ を使って S 行列を計算する前に, 外場である $\chi^\ddagger_n$ には適切な値を与えなければならない. この目的のために, ゴースト数 -1 を持つ任意のフェルミオン的な汎関数 $\Psi[\chi]$ を導入し,

$$\chi^\ddagger_n = \frac{\delta\Psi[\chi]}{\delta\chi^n} \qquad (15.9.5)$$

とする.[†] そうすると, (15.9.1) は,

$$S[\phi,\delta\Psi/\delta\chi] = I[\phi] + (s\chi^n)\,\delta\Psi[\chi]/\delta\chi^n = I[\phi] + s\Psi[\chi] \qquad (15.9.6)$$

となる. (15.8.14) と比べると, これはゲージ固定された作用 $I_{\mathrm{NEW}}[\chi]$ と同じであることがわかる. したがって, 前の節と同じ議論により, 物理的行列要素は Ψ の小さな変化には影響されない. ファデーフ・ポポフ・ド・ウィット形式で構成された作用 (15.8.7) は, $\Psi = -\omega^{*A} f_A$ と選んで, $\phi^\ddagger_r = \omega^{*A}\,\delta f_A/\delta\phi^r$, $\omega^\ddagger_C = 0$, $\omega^{*\,\ddagger}_A = -f_A$ となっているときに相当する.

これまでは何も新しいことは達成していない. 最初の新しい点としては, マスター方程式 (15.9.2) を使って, より一般の理論について $S[\chi,\chi^\ddagger]$ を反場 $\chi^\ddagger_n$ の非線形汎関数にすることで得られる. (可約な理論については, 前の節で論じたようにゴーストのゴーストも χ^n に加

[†] ここでは左微分と右微分を区別する必要は無い. これは, χ^n か $\delta\Psi/\delta\chi^n$ がボソン的だということによる.

え, それらの反場も含めなければならない.) 上に述べたように, $\chi_n^\ddagger$ の統計性は χ^n の統計性と反対にとり, そのゴースト数は $-\mathrm{gh}(\chi^n)-1$ にする. また, $S[\chi,\chi^\ddagger]$ はゴースト数ゼロのボソン的な演算子であると要請する. ω^{*A} と h_A は線形 BRST 変換を受けるので, 他の χ^n に見られた複雑なことは起こらない. (この関係では, 16.4 節を見よ.) したがって, それらとそれらの反場は作用 $S[\chi,\chi^\ddagger]$ に (15.9.1) と同じように入る. つまり,

$$S = S_{\min}[\phi,\omega,\phi^\ddagger,\omega^\ddagger] - h^A\,\omega_A^{*\ddagger} \tag{15.9.7}$$

となる. ここで, $\phi_r^\ddagger$, $\omega_A^\ddagger$, $\omega_A^{*\ddagger}$ は ϕ^r, ω^A, ω^{*A} の反場であり, それぞれゴースト数 -1, -2, 0 を持つ. また, $S_{\min}[\phi,\omega,\phi^\ddagger,\omega^\ddagger]$ はゴースト数ゼロのある汎関数だ. (15.9.7) の最後の項はマスター方程式に何の影響もしないので, $S_{\min}$ はそれ自身マスター方程式を満たす.[††]

$S_{\min}$ はゴースト数ゼロなので, その反場についての冪展開は, 以下の形をとらなければならない.

$$\begin{aligned}S_{\min} = {} & I[\phi] + \omega^A\, f_A^r[\phi]\,\phi_r^\ddagger + \tfrac{1}{2}\omega^A\omega^B\, f^C{}_{AB}[\phi]\,\omega_C^\ddagger \\ & + \tfrac{1}{2}\omega^A\omega^B\, f^{rs}{}_{AB}[\phi]\,\phi_r^\ddagger\,\phi_s^\ddagger + \omega^A\omega^B\omega^C\, f^{rD}{}_{ABC}[\phi]\,\phi_r^\ddagger\omega_D^\ddagger \\ & + \tfrac{1}{2}\omega^A\omega^B\omega^C\omega^D\, f^{EF}{}_{ABCD}[\phi]\,\omega_E^\ddagger\omega_F^\ddagger + \cdots .\end{aligned} \tag{15.9.8}$$

マスター方程式 (15.9.2) で反場についてゼロ次 (したがって, ω^A について 1 次) の項は,

$$0 = f_A^r[\phi]\,\frac{\delta I[\phi]}{\delta\phi^r} \tag{15.9.9}$$

を与える. これは $I[\phi]$ が ϵ^A を任意の微小量とした以下の変換で不変であることと同じだ.

$$\phi^r \to \phi^r + \epsilon^A f_A^r[\phi]\,. \tag{15.9.10}$$

[††] 場 ϕ^r, ω^A, $\phi_r^\ddagger$, $\omega_A^\ddagger$ は**最低変数** (minimal variables), また, ω^{*A}, h_A のようなその反場との 2 次形式が (15.9.7) のように入る場は, **自明な対** (trivial pairs) と呼ばれる.

マスター方程式で右に $\phi^{\ddagger}_{s}$ に, 左に $\omega^A\omega^B$ に比例する項は, 以下を与える.

$$0 = f^r_A[\phi]\,\frac{\delta f^s_B[\phi]}{\delta\phi^r} - f^r_B[\phi]\,\frac{\delta f^s_A[\phi]}{\delta\phi^r} + f^C{}_{AB}[\phi]\,f^s_C[\phi] + \frac{\delta I[\phi]}{\delta\phi^r}\,f^{rs}_{AB}[\phi]\,. \tag{15.9.11}$$

これは, 場の方程式 $\delta I/\delta\phi = 0$ が満たされているとき, 変換 (15.9.10) の (構造定数を $f^C{}_{AB}[\phi]$ とする) 反交換関係になる. マスター方程式で反場について 1 次の他の項は左に $\omega^A\omega^B\omega^C$ に比例し, 右に $\omega^{\ddagger}_D$ に比例するので,

$$0 = f^r_{[A}[\phi]\,\frac{\delta f^D{}_{BC]}[\phi]}{\delta\phi^r} - f^E{}_{[AB}[\phi]\,f^D{}_{C]E}[\phi] + f^{rD}_{ABC}[\phi]\,\frac{\delta I[\phi]}{\delta\phi^r} \tag{15.9.12}$$

となる. ここで下付き添字の角括弧はその中の添字 A, B, C についての反対称化を意味する. 場の方程式が満たされているときは, これは一般化されたヤコビ恒等式 (15.8.12) となる. (15.9.11) は (f^r_A がゲージ対称性の完全系をなすとして) 対称性条件 (15.9.9) に必要だ. 一方, (15.9.12) は交換関係 (15.9.11) の無矛盾性に必要だ. (15.9.11) と (15.9.12) で $S_{\rm min}$ の反場について 2 次の項から発生する項は, $\delta I[\phi]/\delta\chi$ に比例する. したがって, それらは場の方程式が満たされているときにはゼロとなり, この意味で開対称性代数に特徴的なものだ. マスター方程式で反場について 2 次以上の項は $S_{\rm min}$ の反場について 3 次以上の項から生じる. これらは, (15.9.11) と (15.9.12) の無矛盾性条件, その無矛盾性条件の無矛盾性条件等々を与える. これら全ての無矛盾性条件が一つのマスター方程式に含まれていることがバタリン・ビルコビスキー形式の利点だ.

マスター方程式は一般的な BRST 変換のもとでの S の不変性条件としても再解釈できる. これを見るには, また, 将来の目的のためにも, **反括弧** (antibracket) として知られている形式的な道具を導入する

と便利だ. 前の記法に戻り, 二つの一般的な汎関数 $F[\chi,\chi^\ddagger]$ と $G[\chi,\chi^\ddagger]$ の反括弧を以下のように定義する.

$$(F,G) \equiv \frac{\delta_R F}{\delta\chi^n}\frac{\delta_L G}{\delta\chi_n^\ddagger} - \frac{\delta_R F}{\delta\chi_n^\ddagger}\frac{\delta_L G}{\delta\chi^n} . \tag{15.9.13}$$

ここで, S のようなボソン的汎関数については, ボソン的な変数についての右と左の汎関数微分は同じ結果をもたらすが, フェルミオン的な変数についての右と左の汎関数微分は符号が異なることに注意する. $\chi_n^\ddagger$ か χ^n のうちの一つは常にフェルミオン的で, 他はボソン的だから, 反括弧 (S,S) では (15.9.13) の右辺の第 2 項はもし左と右の微分を逆にすると符号が変わる.

$$\frac{\delta_R S}{\delta\chi_n^\ddagger}\frac{\delta_L S}{\delta\chi^n} = -\frac{\delta_L S}{\delta\chi_n^\ddagger}\frac{\delta_R S}{\delta\chi^n} = -\frac{\delta_R S}{\delta\chi^n}\frac{\delta_L S}{\delta\chi_n^\ddagger} .$$

(最後の段階が許されるのは, ここでの因子の一つがボソン的であるために, 因子の順序は問題とならないからだ.) これにより, (S,S) の (15.9.13) の右辺第 2 項は第 1 項の符号を変えたものだとわかる. したがって, マスター方程式 (15.9.2) は S とそれ自身との反括弧がゼロになる要請と書ける.

$$(S,S) = 0 . \tag{15.9.14}$$

これは自明ではない. なぜなら反括弧は,

$$(F,G) = \pm(G,F) \tag{15.9.15}$$

において, 符号は F と G が共にボソン的なときに $+1$, そうでないときは -1 とした一般的な対称性を持っているからだ. 特に, (F,F) はもし F がフェルミオン的なときは自動的にゼロとなるが, F がボソン的なときはそうはならない.

一般化された BRST 変換は以下で定義される.

$$\hat{\delta}_\theta\chi^n = \theta\frac{\delta_R S}{\delta\chi_n^\ddagger} = -\theta(S,\chi^n) , \tag{15.9.16}$$

$$\hat{\delta}_\theta \chi_n^\ddagger = -\theta \frac{\delta_R S}{\delta \chi^n} = -\theta(S, \chi_n^\ddagger) . \tag{15.9.17}$$

ここで, θ はフェルミオン的な微小定数だ. (S が (15.9.1) の形のときは, χ の変換は元の BRST 変換 $\hat{\delta}_\theta \chi^n = \theta s \chi^n$ と同じだ.) この変換の一般的な汎関数への影響を求めるには, 反括弧は以下の意味で微分のように働くことに注意する.

$$(F, GH) = (F, G)\, H \pm G\, (F, H) . \tag{15.9.18}$$

ここで, 符号は G がフェルミオン的で F がボソン的ならば -1, その他の場合は $+1$ だ. したがって, もし G と H が χ と $\chi^\ddagger$ の任意の汎関数で, $\hat{\delta}_\theta G = -\theta(S, G)$ と $\hat{\delta}_\theta H = -\theta(S, H)$ ならば,

$$\hat{\delta}_\theta(GH) = -\theta(S, G)H - G\theta(S, H) = -\theta[(S, G)H \pm G(S, H)]$$

となる. ここで符号は, G がボソン的なときは $+$, フェルミオン的なときは $-$ となる. (15.9.18) の F をボソン的な汎関数 S にとると,

$$\hat{\delta}_\theta(GH) = -\theta(S, GH)$$

となっている. これと (15.9.16), (15.9.17) から, 場と反場の積の和となっている任意の汎関数 F について,

$$\hat{\delta}_\theta F = -\theta(S, F) \tag{15.9.19}$$

が成立することがわかる. マスター方程式 (15.9.14) はこれらの一般化された BRST 変換が S を不変に保つことを述べていると解釈できる.

$$\hat{\delta}_\theta S = -\theta(S, S) = 0 . \tag{15.9.20}$$

もとの BRST 変換と同様にこの対称性変換もベキ零だ. これを見るには, 反括弧のヤコビ恒等式,

$$\pm\, (F, (G, H)) + [\text{巡回置換項}] = 0 \tag{15.9.21}$$

を使う. ここで, 第1項の符号は F と H がボソン的であれば $-$, そうでなければ $+$ だ. また, F, G, H の他の二つの巡回置換で得られる項の符号もそれに対応している. $F = G = S$ とすると, (15.9.21) は,

$$\begin{aligned} 0 &= \mp(S,(S,H)) \mp (H,(S,S)) - (S,(H,S)) \\ &= \mp 2(S,(S,H)) \mp (H,(S,S)) \end{aligned}$$

となる. ここで符号は H がボソン的かフェルミオン的かに応じて $-$ か $+$ になる. これより, マスター方程式 (15.9.14) はベキ零性条件,

$$(S,(S,H)) = 0 \tag{15.9.22}$$

を満たす.

この対称性のおかげで, マスター方程式の解は一意的ではない. たとえば, (15.9.22) は, 任意の解 S に対して他の解を微小変換,

$$S' = S + (\delta F, S) \tag{15.9.23}$$

で作れることを意味している. ここで, S' がボソン的でゴースト数がゼロになるように, δF はフェルミオン的でゴースト数が -1 である χ と $\chi^\ddagger$ の任意の汎関数だ. 特に, δF を χ^n のみのフェルミオン的な汎関数 $\epsilon\Psi$ ととると, 以下を得る.

$$S'[\chi,\chi^\ddagger] = S[\chi,\chi^\ddagger] + \epsilon\frac{\delta\Psi[\chi]}{\delta\chi^n}\frac{\delta_R S}{\delta\chi^\ddagger_n} = S\left[\chi, \chi^\ddagger + \epsilon\frac{\delta\Psi}{\delta\chi}\right] . \tag{15.9.24}$$

これらの微小変換は自明に積分でき, 反場を新しい変数 $\chi^{\ddagger\prime}_n \equiv \chi^\ddagger_n - \delta\Psi/\delta\chi^n$ へとずらしても, マスター方程式が依然として満たされていることを意味している.

変換 (15.9.23) は我々が通常正準変換と呼ぶものの特別な場合になっている. ここでは, これらを7章の正準変換と区別するために「反正準変換」(anticanonical transformation) と呼ぶ. 反正準変換は場と反

場の有限または微小な任意の変換で, 基本的な反括弧の関係式,

$$(\chi^n, \chi^\ddagger_m) = \delta^n_m\,, \qquad (\chi^n, \chi^m) = (\chi^\ddagger_n, \chi^\ddagger_m) = 0 \tag{15.9.25}$$

を不変にするものだ. たとえば, 微小なフェルミオン的な生成子 δF によって生成され, 任意のボソン的かフェルミオン的な汎関数 G を,

$$G \to G' = G + (\delta F, G) \tag{15.9.26}$$

と変換する微小反正準変換を考える. これが基本反括弧 (15.9.25) を変えないことを示すのは簡単だ. この目的のためには, 二つの汎関数 G と H の反括弧 (G, H) が (G', H') に変換され, これは微小量の 1 次で,

$$(G', H') = (G, H) + ((\delta F, G), H) + (G, (\delta F, H))$$

となっていることに着目する. ヤコビ恒等式 (15.9.21) を使うと, これは,

$$(G', H') = (G, H) \pm (\delta F, (G, H)) \tag{15.9.27}$$

となる. ここで, 符号は G と H が共にボソン的ならば $+$, そうでなければ $-$ となる. 特に, もし (G, H) が c 数ならば, これは反正準変換で変更されない. (これは変換 (15.9.23) がマスター方程式を変更しないことを見る別の方法でもある.) 場と反場は c 数の反括弧 (15.9.25) を持つから, 変換された場と反場についてもそれは成り立っていなければならない.

S 行列を計算するには, 反場にある特定の値を与えなければならない. 閉じたゲージ代数のように S が 1 次形 (15.9.1) になっているような簡単な場合には, 反場を (15.9.5) の形にとればよい. つまり, 「ゲージ固定」した作用,

$$I_\Psi[\chi] = S\left[\chi, \frac{\delta\Psi[\chi]}{\delta\chi}\right] \tag{15.9.28}$$

を使って S 行列を計算する. ここで $\Psi[\chi]$ はゴースト数 -1 のフェルミオン的な汎関数だ. (15.9.24) に続く記述に従えば, これは正準変換された反場 $\chi^{\ddagger\prime}$ をゼロととることに同じだ.

ゲージ固定された作用は場 χ^n のみに働く BRST 変換のもとで不変だ.

$$\delta_\theta \chi^n = \theta s \chi^n \,, \quad ここで \quad s\chi^n = \left(\frac{\delta_R S[\chi, \chi^\ddagger]}{\delta \chi^\ddagger_n} \right)_{\chi^\ddagger = \delta\Psi/\delta\chi} . \tag{15.9.29}$$

これを確認するには, 以下に着目する.

$$sI_\Psi[\chi] = \left(\frac{\delta_R S[\chi, \chi^\ddagger]}{\delta \chi^\ddagger_n} \frac{\delta_L S[\chi, \chi^\ddagger]}{\delta \chi^n} \right)_{\chi^\ddagger = \delta\Psi/\delta\chi} + \left(\frac{\delta_R S[\chi, \chi^\ddagger]}{\delta \chi^\ddagger_m} \frac{\delta_L^2 \Psi[\chi]}{\delta \chi^m \delta \chi^n} \frac{\delta_L S[\chi, \chi^\ddagger]}{\delta \chi^\ddagger_n} \right)_{\chi^\ddagger = \delta\Psi/\delta\chi} .$$

右辺の第 1 項はマスター方程式によりゼロとなり, 第 2 項は和を取られる関数が m と n について反対称なのでゼロとなる.‡

S が (15.9.1) の形となる閉じた代数の場合には, 変換 (15.9.29) は元の BRST 変換 $\delta_\theta \chi^n = \theta s \chi^n$ だ. しかし, 一般の開代数については, 変換 (15.9.29) は元の BRST 変換と同じではなく, 一般に場の方程式が満たされないとベキ零でもない. その代りに, マスター方程式でずらした反場 $\chi^{\ddagger\prime}_n = \chi^\ddagger_n - \delta\Psi[\chi]/\delta\chi^n$ について 1 次の項から, 以下が分かる.

$$s^2 \chi^m = \mp \left(\frac{\delta_L}{\delta \chi^\ddagger_m} \frac{\delta_R}{\delta \chi^\ddagger_n} I[\chi, \chi^\ddagger] \right)_{\chi^\ddagger = \delta\Psi/\delta\chi} \frac{\delta I_\Psi[\chi]}{\delta \chi^n} . \tag{15.9.30}$$

ここで, 符号は χ^m がボソン的かフェルミオン的かに応じて, それぞ

---

‡ χ^n と χ^m が共にボソン的なときは, これは $\delta S/\delta\chi^\ddagger_n$ と $\delta S/\delta\chi^\ddagger_m$ が反可換なことによる. χ^n と χ^m の一つがフェルミオン的で, 他がボソン的なときは, これはフェルミオン的な方の $\chi^\ddagger$ による S の右微分と左微分が逆の符号を持つことによる. χ^n と χ^m が共にフェルミオン的な項はこれらの項に対し $\delta_L^2 \Psi/\delta\chi^m \delta\chi^n$ が反対称なので, 反対称だ.

れ, − か + となる. 以前と同じく, 開ゲージ代数に特有の場の方程式への依存性は, S の反場について 2 次の項から生じている.

ここまでは, 開, もしくは閉ゲージ代数に基づき, 古典的場の理論の形式を扱ってきた. ここで, このような理論でどのように量子力学的計算を行うかを考えなければならない. 物理的な行列要素は $\exp(iI_\Psi[\chi])$ を重みとする汎関数積分で計算できるだろう. 上で説明したように, $I_\Psi[\chi]$ は $S[\chi,\chi^\ddagger]$ から $\chi^\ddagger_n = \delta\Psi[\chi]/\delta\chi^n$, つまり $\chi^{\ddagger\prime}_n = 0$ として得られる. $\Psi[\chi]$ の変化のこれらの行列要素への影響を調べたい. まず真空・真空振幅,

$$Z_\Psi = \int \left[\prod d\chi\right] \exp(iI_\Psi[\chi]) \tag{15.9.31}$$

を考える. $\Psi[\chi]$ を $\delta\Psi[\chi]$ だけ変化させたときに, この振幅は以下の分だけ変化する.

$$\delta Z = i\int \left[\prod d\chi\right] \exp(iI_\Psi[\chi]) \left(\frac{\delta_R S[\chi,\chi^\ddagger]}{\delta\chi^\ddagger_n}\right)_{\chi^\ddagger=\delta\Psi/\delta\chi} \left(\frac{\delta\,(\delta\Psi[\chi])}{\delta\chi^n}\right) . \tag{15.9.32}$$

場の空間で部分積分すると, これは,

$$\delta Z = \int \left[\prod d\chi\right] \exp(iI_\Psi[\chi]) \times \left\{\frac{\delta_R S[\chi,\chi^\ddagger]}{\delta\chi^\ddagger_n}\,\frac{\delta_L\, I_\Psi[\chi]}{\delta\chi^n} - i\Delta S[\chi,\chi^\ddagger]\right\}_{\chi^\ddagger=\delta\Psi/\delta\chi} \delta\Psi[\chi] \tag{15.9.33}$$

となる. ここで,

$$\Delta \equiv \frac{\delta_R}{\delta\chi^\ddagger_n}\frac{\delta_L}{\delta\chi^n} \tag{15.9.34}$$

だ. これにより真空・真空振幅が Ψ に依存しない条件は, 一般的にマスター方程式 (15.9.2) ではなく, 量子マスター方程式と呼ばれる以下の式だということがわかる.

$$(S,S) - 2i\Delta S = 0 \quad ただし \quad \chi^\ddagger = \delta\Psi/\delta\chi \quad において . \tag{15.9.35}$$

cgs 単位系では, $S[\chi, \chi^\ddagger]$ は因子 $1/\hbar$ を伴うので, (15.9.35) の第 2 項は $-2i$ の代りに係数 $-2i\hbar$ を持つ. したがって, 量子マスター方程式 (15.9.35) が満たされているときは必ず S の $\hbar$ についてゼロ次の項は元のマスター方程式 (15.9.2) を満たす. 通常, 古典的マスター方程式を満たす作用を構成し, (15.9.35) の最初の項をゼロとするのは簡単だが, 第 2 項がゼロとなるかどうかは問題だ. 量子マスター方程式が局所的な作用で満たされていない場合については, アノマリーを扱う 22 章で考察する.

量子マスター方程式 (15.9.35) が満たされると仮定すると, Ψ を $\delta\Psi$ だけ変化させたときの演算子 $\mathcal{O}[\chi]$ の真空期待値の変化は以下となる.

$$\delta\langle\mathcal{O}\rangle = \frac{-i}{Z_\Psi}\int\left[\prod d\chi\right]\,\exp\left(iI_\Psi[\chi]\right)\frac{\delta_R\mathcal{O}[\chi]}{\delta\chi^n} \times\left(\frac{\delta_R S(\chi,\chi^\ddagger)}{\delta\chi^\ddagger_n}\right)_{\chi^\ddagger=\delta\Psi/\delta\chi}\delta\Psi[\chi]\,. \tag{15.9.36}$$

(15.9.36) の被積分関数の指数関数の係数はちょうど $s\mathcal{O}[\chi]$ だ. 一般化された BRST 変換 (15.9.16)–(15.9.17) のもとで不変な演算子[‡‡] の期待値は, ゲージ固定フェルミオン Ψ の変化に影響されない. 二つ以上の演算子の真空期待値についても同様の結果が成立する.

補遺 A: リー代数に関する 1 定理

この補遺では, 生成子 t_α と構造定数 $C^\alpha{}_{\beta\gamma}$ を持つ一般的なリー代数 $\mathcal{G}$ について, 以下の三つの条件の同等性を証明する.

---

‡‡開ゲージ理論については, 一般的に変換 (15.9.16)–(15.9.17) のもとで不変な演算子は定数を除いて存在しない. その代りに, $\sigma O = (O, S) - i\Delta O$ で定義されるベキ零の「量子 BRST 演算子」σ のもとで不変な演算子 $O(\chi, \chi^\ddagger)$ を考えなければならない. O が χ のみに依るときには, この条件は (15.9.36) に帰着する. もし $\sigma O = 0$ なら, $O(\Psi, \delta\Psi/\delta\chi)$ の期待値はゲージ固定フェルミオン Ψ の小さな変化に影響されない.[24]

a: 実の対称な正定値の行列 $g_{\alpha\beta}$ が存在し, 以下の不変性条件を満たす.

$$g_{\alpha\beta}C^{\beta}{}_{\gamma\delta} = -\, g_{\gamma\beta}C^{\beta}{}_{\alpha\delta}\,. \tag{15.A.1}$$

(これは 15.2 節で物理的に必要なことが示された条件 (15.2.4) だ.)

b: リー代数の基底 (つまり, ある実で正則な行列 $\mathcal{S}$ を使って, $\tilde{t}_\alpha = \mathcal{S}_{\alpha\beta}t_\beta$ と表される生成子の組 $\tilde{t}_\alpha$) で, 構造定数 $\tilde{C}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ が下の添字 β と γ のみならず, α, β, γ の三つの添字全てについて反対称となるものが存在する.

c: リー代数 $\mathcal{G}$ が相互に可換なコンパクト単純部分代数と $U(1)$ 部分代数 $\mathcal{H}_m$ の直和になっている.

ここでは, **a** から **b** を導き, **b** から **c** を導き, **c** から **a** を導いて, **a**, **b**, **c** の同等性を証明する. その副産物として, これらの条件が満たされれば, $\mathcal{G}$ の生成子を t_{ma} と書いて, m を t_{ma} が属する単純部分代数か $U(1)$ 部分代数 $\mathcal{H}_m$ の添字, a がその部分代数のなかの個々の生成子の添字として, そして, (15.A.1) を満たす行列 $g_{ma,nb}$ が,

$$g_{ma,nb} = g_m^{-2}\delta_{mn}\delta_{ab} \tag{15.A.2}$$

を満たすように選ぶことができることも証明する. ここで, g_m^{-2} は任意の実の正定数だ.

まず, **a**, つまり不変性条件 (15.A.1) を満たす実の対称正定値行列 $g_{\alpha\beta}$ の存在を仮定する. そのとき, 新しい生成子,

$$\tilde{t}_\alpha \equiv (g^{-1/2})_{\alpha\beta}t_\beta \tag{15.A.3}$$

を定義する. ここで, 実の逆平方根行列 $g^{-1/2}$ の存在は $g_{\alpha\beta}$ の正定値性で保証されている. これは, 以下のリー代数を満たす.

$$\left[\tilde{t}_\alpha, \tilde{t}_\beta\right] = i\,\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma}\tilde{t}_\gamma\,. \tag{15.A.4}$$

ここで,

$$\tilde{C}_{\gamma\alpha\beta} \equiv (g^{-1/2})_{\alpha\alpha'}(g^{-1/2})_{\beta\beta'}(g^{+1/2})_{\gamma\gamma'}C^{\gamma'}{}_{\alpha'\beta'} \tag{15.A.5}$$

となっている. (この基底では, α, β 等の上と下の添字の区別を無くし, $\tilde{C}^{\gamma}{}_{\alpha\beta}$ の代りに $\tilde{C}_{\gamma\alpha\beta}$ と書くのが便利だ.) このとき, (15.A.1) から $\tilde{C}_{\alpha\gamma\delta}$ が γ と δ についてのみならず α と γ についても反対称であり, 完全反対称であることがわかる. したがって **b** が成立する.

次に **b**, つまり構造定数が完全に反対称なリー代数の基底があると仮定する. この基底では, 随伴表現での行列 $(\tilde{t}^{A}{}_{\alpha})_{\beta\gamma} \equiv -i\tilde{C}_{\beta\gamma\alpha}$ は純虚で反対称であり, すなわちエルミートだ. エルミート行列についての一般的定理によれば,* $\tilde{t}^{A}{}_{\alpha}$ は既約であるか, 完全に可約だ.

完全に既約な $N \times N$ 行列 $\tilde{t}^{A}{}_{\alpha}$ の集合とは, 全ての $\tilde{t}^{A}{}_{\alpha}$ に対して不変な次元が N より小さい部分空間がない集合のことだ. つまり, $(\tilde{t}^{A}{}_{\alpha})_{\beta\gamma}(u_r)_\gamma$ がそれぞれの α と r について ベクトル $(u_s)_\beta$ の 1 次結合 になっているようなゼロでないベクトル $(u_r)_\beta$ の集合は N 個以上からなるものだ. 行列 $(\tilde{t}^{A}{}_{\alpha})_{\beta\gamma}$ はこの基底では構造定数に比例するから, これは線形結合 $T_r \equiv (u_r)_\gamma \tilde{t}^{A}{}_{\gamma}$ で全ての $\tilde{t}^{A}{}_{\alpha}$ との交換関係が閉じている, つまり $[\tilde{t}^{A}{}_{\alpha}, T_r]$ が各 α と r について T_s の 1 次結合となる集合は無いということと同じだ. そのような行列 T_r の集合は全リー代数の不変部分代数の生成子を与える. そのような集合が無いというこ

---

*もし行列 H_α の組が既約でないならば, 定義により H_α のもとで不変な (全空間より小さい) 部分空間を張るベクトルの組 u_n がある. つまり, 全ての α と n に対して, $H_\alpha u_n = \sum_m (C_\alpha)_{mn} u_m$ となる. この場合には, ベクトル u_n と全ての u_n に垂直な空間を張るベクトル v_k とからなる基底を採用する. もし H_α がエルミートなら, $(u_n, H_\alpha v_k) = \sum_m (C_\alpha)^*_{mn}(u_m, v_k) = 0$ だから, v_k が張る空間も H_α のもとで不変だ. つまり, $H_\alpha v_k = \sum_\ell (D_\alpha)_{\ell k} v_\ell$ となる. この基底では, 行列 H_α は同時にブロック対角形になる.

$$H_\alpha = \begin{pmatrix} C_\alpha & 0 \\ 0 & D_\alpha \end{pmatrix}.$$

このように続けていき, 行列 H_α を各ブロックに既約行列を持つブロック対角形にできる.

とはリー代数が単純だということだ.

完全に可約な行列 $\tilde{t}^{\mathrm{A}}{}_{\alpha}$ の集合とは, 基底を適切に選ぶとブロック対角形の以下の超行列の形に書けるものだ.

$$(\tilde{t}^{\mathrm{A}}{}_{\alpha})_{ma,nb} = [t^{\mathrm{A}(m)}{}_{\alpha}]_{ab}\,\delta_{mn}\,. \tag{15.A.6}$$

ここで, 部分行列 $t^{\mathrm{A}(m)}{}_{\alpha}$ は既約か, もしくはゼロとなる.** この基底をリー代数自身に採用すると, 構造定数は, 以下のようになる.

$$\tilde{C}_{\ell c,ma,nb} = i(\tilde{t}^{\mathrm{A}}{}_{\ell c})_{ma,nb} = i\,(t^{\mathrm{A}(m)}{}_{\ell c})_{ab}\,\delta_{mn}\,. \tag{15.A.7}$$

しかし, これは完全反対称で, δ_{mn} に比例するので, 以下のように $\delta_{\ell n}$ と $\delta_{\ell m}$ にも比例しなければならない.

$$\tilde{C}_{\ell c,ma,nb} = \delta_{\ell n}\,\delta_{\ell m}\,C^{(\ell)}_{cab}\,. \tag{15.A.8}$$

言い換えれば, この基底でのリー代数の任意の表現 $t^{(m)}{}_{a} \equiv t_{ma}$ に対して, 添字 a,b,c について完全反対称な実の $C^{(m)}_{cab}$ を使って,

$$[t^{(m)}{}_{a}, t^{(n)}{}_{b}] = i\,\delta_{mn}C^{(m)}_{cab}t^{(m)}{}_{c} \tag{15.A.9}$$

となる. 生成子が $t^{(m)}$ の集合に分かれ, その内のある集合の生成子と同じ集合の生成子との交換関係がその集合の生成子の 1 次結合で書かれ, ある集合の全ての要素と他のどの集合の全ての要素とも可換となる基底を構成できるという事実は, そのリー代数が部分代数 $t^{(m)}$ の直和となるということの意味だ. 各 m について, 随伴表現の行列 $t^{(m)A}$ の集合は, その部分代数が単純であるか, 代数の全ての生成子と可換ないわゆる $U(1)$ 生成子からなるかに対応して, 既約かゼロとなる.

こうして, 実の完全反対称構造定数を持つもっとも一般的なリー代数は 1 つ以上の単純部分代数か $U(1)$ リー代数の直和となることを証

**ここで, m と n は主要対角部分のブロックの添字だ. そして, a と b は各ブロック内の行と列を意味する. また, m については和をとらない. a,b 等がとる値の範囲は一般に m に依存する.

明できた. さらに, 単純部分代数は 各行列 $-C^{(m)}_{acd}C^{(m)}_{bdc}$ が正定値であるという意味で, コンパクトだ. これは, 任意の実ベクトル u_a について, $-C^{(m)}_{acd}C^{(m)}_{bdc}u_a u_b = \sum_{cd}[\sum_a u_a C^{(m)}_{acd}]^2$ は正の量の和であり, $u_a = 0$ でなければゼロとなり得ないことによる. $u_a \neq 0$ ならば, $\sum_a u_a C^{(m)}_{acd} = 0$ という条件は, $\sum_a u_a t^{(m)}{}_a$ 自身が不変可換部分代数であることを意味し, $t^{(m)}{}_a$ が単純リー代数をなすという事実に反するからだ. これで **c** の証明ができた.

最後に **c**, つまり, 単純リー代数と $U(1)$ リー代数の直和となっているリー代数を考える. つまり, ある基底 $t^{(m)}_a = \mathcal{S}_{ma,\alpha}t_\alpha$ で $\mathcal{S}$ が実で正則なとき,

$$[t^{(m)}_a, t^{(n)}_b] = i\delta_{nm}C^{(m)c}{}_{ab}t^{(m)}_c$$

となっているとする. ここで各部分代数 $t^{(m)}$ は単純か全てと可換だ. 更に単純リー代数は行列,

$$g^{(m)}_{ab} \equiv -C^{(m)c}{}_{ad}C^{(m)d}{}_{bc} \tag{15.A.10}$$

が正定値だという意味でコンパクトだと仮定する. (15.A.1) を満たす実の正定値行列 $g_{\alpha\beta}$ を構成するには, 生成子 $t_{ma} = t^{(m)}_a$ の基底で,

$$g_{ma,nb} \equiv g^{(m)}_{ab}\delta_{mn} \tag{15.A.11}$$

とする. ここで, $g^{(m)}_{ab}$ は, $t^{(m)}$ が単純部分代数のとき (15.A.10) の行列とし, $t^{(m)}$ が一つ以上の $U(1)$ 部分代数の直和のとき任意の実対称正定値行列とする. 各 $g^{(m)}_{ab}$ が実, 対称で正定値なので, 行列 (15.A.11) は明らかに実, 対称で正定値だ. 要請 (15.A.1) を確認するには, 構造定数のヤコビ恒等式,

$$C^{(m)c}{}_{ad}C^{(m)d}{}_{be} + C^{(m)c}{}_{bd}C^{(m)d}{}_{ea} + C^{(m)c}{}_{ed}C^{(m)d}{}_{ab} = 0 \tag{15.A.12}$$

と $C^{(m)e}{}_{fc}$ の縮約をとる. 第3項で $c \to d \to e \to c$ と和をとる添字の名を変えて (15.A.10) を使うと, 単純部分代数についての結果は,

$$g^{(m)}_{df} C^{(m)d}{}_{ab} = C^{(m)c}{}_{ad} C^{(m)d}{}_{be} C^{(m)e}{}_{cf} - C^{(m)c}{}_{fd} C^{(m)d}{}_{be} C^{(m)e}{}_{ca}$$

となる. 重要なことは, これは左辺が,

$$g^{(m)}_{df} C^{(m)d}{}_{ab} = -g^{(m)}_{da} C^{(m)d}{}_{fb} \tag{15.A.13}$$

と a と f について反対称だということを意味することだ. $U(1)$ 部分代数については, 構造定数がゼロとなるので同じ結果が自明に成立する. 対称性条件 (15.A.1) は (15.A.13) からすぐに導ける. これで, **a** の証明ができた. 以上により **a**, **b**, **c** の同等性の証明が完成した. .

さて, 行列 $g_{\alpha\beta}$ に戻る. 構造定数が完全反対称のとき, 不変性条件 (15.2.4) は, この行列がリー代数の随伴表現の全ての行列と可換だと表せる.

$$[g,\ t^{\mathrm{A}}{}_{\gamma}] = 0\,. \tag{15.A.14}$$

全ての $(t^{\mathrm{A}}{}_{\gamma})_{\alpha\beta}$ がブロック対角形であり, 主対角には既約な (もしくはゼロの) 部分行列を持つということをすでに見た. よく知られた定理[25]によれば, このとき $g_{\alpha\beta}$ もまたブロック対角形で, そのブロックは $t^{A}{}_{\gamma}$ と同じ大きさで同じ位置にあり, 各ブロックの部分行列は単位行列に比例しなければならない. ($t^{A}{}_{\gamma}$ の二つの部分行列が, 相似変換で関係しているという意味で同等なときには, $g_{\alpha\beta}$ の部分行列を単位行列に比例する形に持っていくために, 基底に適切な変換をしなければならないこともある.) したがって (15.A.11) の記法では, この行列は (15.A.2) で与えられる.

補遺 B: カルタン・カタログ

ここで, 単純リー代数の完全なカタログを証明無しに与える. これはカルタンによってその最終的な形を与えられた.[26] ここでは, これら

を「コンパクト」な形で与える. つまり, 生成子は有限次元エルミート行列で忠実な形で表現される. リー代数をその階数, つまり生成子の独立で互いに可換な 1 次結合の数を意味する下付きの添字 $n \geq 1$ で表す.

$\boldsymbol{A_n}$: これは特殊ユニタリー群 $SU(n+1)$, つまり, 全てのユニタリー ($U^\dagger = U^{-1}$) でユニモジュラー ($\mathrm{Det}\, U = 1$) な $n+1$ 次元の行列が成す群の代数だ. 単位元から微小量しか離れていない任意の行列は,

$$U = 1 + iH$$

と表せる. ここで, 微小な H は以下の条件を満たす.

$$H^\dagger = H\ ,\quad \mathrm{Tr}\, H = 0\ .$$

したがって, A_n は全てのエルミートでトレースがゼロの $n+1$ 次元行列がなすリー代数だ. 可換なエルミート行列の任意の集合は同時対角化でき, $n+1$ 次元の独立なトレースがゼロの対角行列は最大 n 個あるから, A_n の階数は n だ. $n+1$ 次元の任意のエルミート行列は $(n+1)^2$ 個の独立な実パラメータを持ち (主対角成分に $n+1$ 個の実数, そして, 主対角の上側に $n(n+1)/2$ 個の複素数, 下にはそれらの複素共役) , トーレスがゼロの条件でそれらの一つが消されるから, A_n の次元は,

$$d(A_n) = (n+1)^2 - 1 = n(n+2)$$

となる. A_n は全て単純だ.

$\boldsymbol{B_n}$: これは, ユニタリー直交群 $O(2n+1)$, つまり, 全てのユニタリー ($\mathcal{O}^\dagger = \mathcal{O}^{-1}$) で, 直交 ($\mathcal{O}^{\mathrm{T}} = \mathcal{O}^{-1}$), したがって実の $2n+1$ 次元の行列が作る群の代数だ. (ユニタリーな行列に制限するので, この群は $UO(2n+1)$ と書かれるときもある.) 単位元から微小量しか離れてい

ない任意のそのような行列 $\mathcal{O}$ は,

$$\mathcal{O} = 1 + i\,A$$

と表せ, A は,

$$A^* = -A = A^{\mathrm{T}}$$

を満たす微小な行列だ. (ここで $\mathcal{O}$ がさらに $\mathrm{Det}\,\mathcal{O} = 1$ という条件を満たす部分群 $SO(2n+1)$ に制限しても違いはない. これは, 単位元に近い任意の直交行列 $\mathcal{O}$ は $\mathrm{Det}\,\mathcal{O} = 1$ となるからだ.) 可換な純虚数の反対称 $(2n+1)$ 次元の任意の行列の集合は, (共通の直交変換により) 超行列,

$$\begin{bmatrix} a_1\sigma_2 & & & & 0 \\ & a_2\sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_n\sigma_2 & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

の形に出来る. ここで, σ_2 は通常の 2×2 行列,

$$\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

で, $a_1, \cdots, a_n$ は実数だ. したがって, B_n の階数は明らかに n だ. 純虚数の反対称行列は対角成分より上の純虚数の成分を決めれば完全に決まるので, その次元は,

$$d(B_n) = \frac{(2n+1)(2n)}{2} = n(2n+1)$$

となる. B_n はすべて単純だ.

$O(N)$ には別の定義もあり, それは次の単純リー代数の大きな集合を調べる動機を理解するのに役立つ. $O(N)$ を直交条件 $\mathcal{O}^{\mathrm{T}}\mathcal{O} = 1$ を満たす N 次元の実行列とする代りに, それを以下の条件を満たす N 次元の実行列 $\mathcal{M}$ の群としてもよい.

$$\mathcal{M}^{\mathrm{T}}\mathcal{P}\mathcal{M} = \mathcal{P}\,.$$

ここで, $\mathcal{P}$ は任意の正定値実対称行列だ. これは, このような任意の $\mathcal{P}$ はある実の正則行列 $\mathcal{R}$ を使って常に $\mathcal{P} = \mathcal{R}^{\mathrm{T}}\mathcal{R}$ と表され, これにより, 上の条件を満たす任意の行列 $\mathcal{M}$ を実の直交行列にする相似変換 $\mathcal{R}\mathcal{M}\mathcal{R}^{-1}$ があることによる. したがって, $\mathcal{P}$ を様々な異なる実対称正定値行列と選んでも群は変わらない.

C_n: これはユニタリーなシンプレクティック群 $USp(2n)$, つまり, 反対称な正則行列 $\mathcal{A}$ を,

$$\mathcal{M}^{\mathrm{T}}\mathcal{A}\mathcal{M} = \mathcal{A}\,,$$

$$\mathcal{A}^{\mathrm{T}} = -\mathcal{A} \quad , \quad \mathrm{Det}\,\mathcal{A} \neq 0$$

と不変に保つユニタリー行列 $\mathcal{M}$ のなす群だ. (d 次元では $\mathrm{Det}\,\mathcal{A} = \mathrm{Det}\,\mathcal{A}^{\mathrm{T}} = (-)^d \mathrm{Det}\,\mathcal{A}$ となるから, もし d が奇数なら $\mathrm{Det}\,\mathcal{A}$ はゼロとならなければならない. したがって, d が偶数でないと $USp(d)$ は存在しない.) このような任意の正則行列 $\mathcal{A}$ (成分が複素数でもよい) は,

$$\mathcal{A} = \mathcal{R}^{\mathrm{T}}\mathcal{A}_0\mathcal{R}$$

という標準的な形に書ける. ここで, $\mathcal{R}$ はユニタリーで, $\mathcal{A}_0$ は超行列,

$$\mathcal{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

だ. (その代りに, $\mathcal{A}_0$ をブロック対角な超行列として, 主対角に沿って σ_1 があるとしてもよい.) したがって, $USp(2n)$ は以下を満たすユニタリー行列 $\mathcal{S}$ の群であるともいえる.

$$\mathcal{S}^{\mathrm{T}}\mathcal{A}_0\mathcal{S} = \mathcal{A}_0\,.$$

これは, そのような任意の $\mathcal{S}$ はユニタリー変換によって前の条件 $\mathcal{M}^{\mathrm{T}}\mathcal{A}\mathcal{M} = \mathcal{A}$ を満たすユニタリー行列 $\mathcal{M} = \mathcal{R}^{-1}\mathcal{S}\mathcal{R}$ に変換でき

るからだ. 単位元から微小量しか離れていない任意の行列 $\mathcal{S}$ は,

$$\mathcal{S} = 1 + i\mathcal{H}$$

と書ける. ここで, $\mathcal{H}$ は以下の条件を満たす微小行列だ.

$$\mathcal{H}^\dagger = \mathcal{H}, \quad \mathcal{H}^{\mathrm{T}}\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_0\mathcal{H} = 0\,.$$

この条件を満たす最も一般の $2n$ 次元の行列 $\mathcal{H}$ は超行列,

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B}^* & -\mathcal{A}^* \end{bmatrix}$$

と書ける. ここで, n 次元の複素部分行列 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ は以下を満たす.

$$\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{A}\,, \qquad \mathcal{B}^{\mathrm{T}} = \mathcal{B}\,.$$

可換な生成子の最大集合では, $\mathcal{A}$ は対角的で, $\mathcal{B}$ はゼロだから,

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} a_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & a_n & & & \\ & & & -a_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & -a_n \end{bmatrix}$$

という形になる. ここで, $a_1, \cdots, a_n$ は実だ. したがって, C_n の階数は明らかに n だ. C_n の次元は, エルミート行列 $\mathcal{A}$ の独立な実パラメータの数 n^2 と, 複素対称行列 $\mathcal{B}$ の独立な実パラメータの数 $2n(n+1)/2$ の和であり,

$$d(C_n) = n^2 + 2 \times n(n+1)/2 = n(2n+1)$$

となる. C_n の代数は全て単純だ.

$\boldsymbol{D_n}$: これはユニタリー直交群 $O(2n)$, つまり, $2n$ 次元のユニタリー直交行列全てからなる群の代数だ. B_n の議論が D_n にも適用できる.

ただ唯一の違いは, ここでは可換な生成子の任意の集合が以下の形になることだ.

$$\begin{bmatrix} a_1\sigma_2 & & & 0 \\ & a_2\sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n\sigma_2 \end{bmatrix} .$$

したがって, 階数は依然として n だ. また, ここでは次元は,

$$d(D_n) = \frac{(2n)(2n-1)}{2} \ = \ n(2n-1)$$

となる. D_1 は一つの生成子のみを持つ可換代数であり, D_2 は直和 $B_1 + B_1$ だ. これらを除く D_n は全て単純だ.

例外リー代数 (exceptional Lie algebra): 上の古典リー代数に加えて, 特別な5つの場合がある. これらは, $G_2(d=14)$, $F_4(d=52)$, $E_6(d=78)$, $E_7(d=133)$, $E_8(d=248)$ だ.

全ての古典リー代数が実際に異なるわけではない. 同型は以下の4つある.

$$A_1 = B_1 = C_1 \ , \qquad C_2 = B_2 \ , \qquad A_3 = D_3 \ .$$

これらは, それらが代数となっているリー群の同型関係に対応している. しかし, $B_1 = A_1$, $B_2 = C_2$, $D_3 = A_3$ のような同型関係は, $SO(3)$ が $SU(2)$ に, $SO(5)$ が $USp(4)$ に, $SO(6)$ が $SU(4)$ に同型であることを意味しない. その代りに, $SU(2)$,$USp(4)$, $SU(4)$ はそれぞれ, $SO(3)$, $SO(5)$, $SO(6)$ の単連結な被覆群となっている. (被覆群については2章で述べた.) しかしながら, リー代数の同型関係は $SO(3)$, $SO(5)$, $SO(6)$ の2値基本スピノル表現を構成する上で非常に役立つ. それらは, それぞれ, $SU(2)$, $USp(4)$, $SU(4)$ を定義する表現だからだ. また, $SO(4)$ は $SO(3) \times SO(3)$ に同型なので, その2値スピノル表現はちょうど $SU(2) \times SU(2)$ を定義する表現だ. $d \geq 7$ では, $SO(d)$ の2値スピノル表現は他の方法で構成しなければならない. そのもっとも単純なやり方は5.4節で述べたクリフォード代数を使うものだ.

問題

1. ビアンキ恒等式,

$$D_\mu F_{\alpha\nu\lambda} + D_\nu F_{\alpha\lambda\mu} + D_\lambda F_{\alpha\mu\nu} = 0$$

を導け.

2. 非可換ゲージ理論で, ゲージ固定関数 $f_\alpha = \nabla \cdot \mathbf{A}_\alpha$ を使った一般化されたクーロン・ゲージをとるとする. このときのゴースト・ラグランジアンを導け. ゴースト・プロパゲーターはどのようになるか? ($B[f] = \exp(-i \int d^4x\, f^2/2\xi)$ とせよ.)

3. 電磁理論で, ゲージ固定関数を $f = \partial_\mu A^\mu + cA_\mu A^\mu$ としたとする. ここで, c は任意定数だ. このときのゴースト・ラグランジアンを導け. ゴースト・プロパゲーターはどのようになるか? ($B[f] = \exp(-i \int d^4x\, f_\alpha f_\alpha/2\xi)$ とせよ.)

4. 生成子をちょうど 4 つだけ持つ単純リー代数は存在しないことを証明せよ.

5. 場 $\psi_\ell(x)$ が生成子 t_α のゲージ群の表現に属し, 経路 $x^\mu = x^\mu(\tau)$ に沿って以下の微分方程式にしたがって変化するとする.

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} = it_\alpha \psi(\tau) A_{\alpha\mu}\left(x(\tau)\right) \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} \,.$$

($\psi_\ell(x)$ と $A_{\alpha\mu}(x)$ は共に c 数の古典場だ.) このとき, 点 X^μ の近傍の任意の小さな閉じた経路 $\mathcal{P}$ をまわるときの ψ の変化は以下に比例することを示せ.

$$t_\alpha \psi(X)\, F_{\alpha\mu\nu}(X) \oint_{\mathcal{P}} x^\mu(\tau)\, \frac{dx^\nu(\tau)}{d\tau}\, d\tau \,.$$

また, 比例定数を求めよ. この結果を使い, もし $F_{\alpha\mu\nu}(x)$ がどこでもゼロとなるなら, ゲージ変換を使って $A_{\alpha\mu}(x)$ を少なくとも

ある有限の領域でゼロとすることが可能なことを示せ.（ヒント：参考文献 6 のように, 電磁理論や一般相対論の場合と類似の議論を使え.)

6. 一般的な非可換ゲージ理論で, 任意定数 n_μ を使ったゲージ固定汎関数 $f_\alpha = n_\mu A^\mu_\alpha$ のもとで経路積分を使い, ゲージ場 $A_{\alpha\mu}(x)$ のプロパゲーターを計算せよ. ($B[f] = \exp(-i\int d^4x\, f_\alpha f_\alpha/2\xi)$ とせよ.) ゴースト・ラグランジアンはどうなるか？ゴースト・プロパゲーターはどうなるか？また, ゴーストの相互作用頂点も求めよ.

7. 基本的物理原理として, ゲージ不変性の代りに BRST 不変性を採用したとする. 場 $A_{\alpha\mu}$, ω_α, ω^*_α, h_α とその微分の積でできた, 次元が $(\mathrm{mass})^d$ で $d \le 4$ の項の和となっていて, ローレンツ変換, ゴースト数による位相変換 ($\omega_\alpha \to e^{i\theta}\omega_\alpha$, $\omega^*_\alpha \to e^{-i\theta}\omega^*_\alpha$), 大局的ゲージ変換 ($\epsilon_\alpha$ が定数), BRST 変換で (全微分を除いて) 不変なもっとも一般的ラグランジアン密度を導け.

8. 反括弧が対称性条件 (15.9.15) とヤコビ恒等式 (15.9.21) を満たすことを示せ.

9. もし, 汎関数 O が条件 $(O, S) = i\Delta S$ を満たし, 作用 S が量子マスター方程式を満たすならば, 量子平均 $\langle O\rangle$ がゲージ固定汎関数 Ψ に依存しないことを示せ.

参考文献

1. C. N. Yang and R. L. Mills, *Phys. Rev.* **96**, 191 (1954). クライン (O. Klein) も $SU(2)$ ヤン・ミルズ理論に非常に近いところまで来ていた. これは, 1938 年のワルシャワでの会議報告, *New Theories in Physics* (International Institute of Intellectual Cooperation, Paris, 1939) にある. クラインの理論を批判的に論じたものとしては, D. J. Gross による 'Oscar Klein and Gauge Theory,' と題した 1994 Oscar Klein symposium at Stockholm での発表がある (Princeton preprint PUPT–1508).

2. R. Utiyama, *Phys. Rev.* **101**, 1597 (1956).

3. R. P. Feynman, *Acta Phys. Polonica* **24**, 697 (1963).

4. L. D. Faddeev and V. N. Popov, *Phys. Lett.* **25B**, 29 (1967).

5. B. S. De Witt, *Phys. Rev.* **162**, 1195, 1239 (1967).

6. この証明は一般相対論での対応する結果, つまり, 有限な単連結の領域で計量を平坦にする座標変換が存在するには, リーマン・クリストッフェル曲率テンソルがゼロとなるのが必要十分だということの標準的な証明を簡単に適用してできる. それには, たとえば, S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972) の 6.3 節と 6.4 節を見よ.

7. **a** が ($g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ も成立するとき) **b** を意味し, **b** が **c** を意味するという証明は, M. Gell-Mann and S. L. Glashow, *Ann. Phys. (N.Y.)* **15**, 437 (1961) で与えられた. .

8. たとえば, S. Weinberg, 同上, 7.6 節を見よ.

9. V. Gribov, *Nucl. Phys.* **B139**, 1 (1978). また, R. Jackiw, I. Muzinich, and C. Rebbi, *Phys. Rev.* **D17**, 1576 (1978); R. Jackiw, *New Frontiers in High Energy Physics*, B. Kursunoglu, A. Perlmutter, L. Scott 編 (Plenum, New York, 1978); N. Christ and T. D. Lee, *Phys. Rev.* **D22**, 939 (1980); R. Jackiw, *Current Algebra and Anomalies* (World Scientific, Singapore, 1985) の脚注 50 も見よ.

10. C. Becchi, A. Rouet, and R. Stora, *Comm. Math. Phys.* **42**, 127 (1975); *Renormalization Theory*, G. Velo, A. S. Wightman 編 (Reidel, Dordrecht, 1976); *Ann. Phys.* **98**, 287 (1976).

11. I. V. Tyutin, Lebedev Institute preprint N39 (1975).

11*a*. N. Nakanishi, *Prog. Theor. Phys.* **35**, 1111 (1966); B. Lautrup, *Mat. Fys. Medd. Kon. Dan. Vid.-Sel. Medd.* **35**, 29 (1967).

12. この議論の源は知らない. 私は J. Polchinski から学んだ. .

13. S. N. Gupta, *Proc. Phys. Soc.* **63**, 681 (1950); **64**, 850 (1951); K. Bleuler, *Helv. Phys. Acta* **3**, 567 (1950); K. Bleuler and W. Heitler, *Progr. Theor. Phys.* **5**, 600 (1950).

13*a*. G. Curci and R. Ferrari, *Nuovo Cimento* **35**, 273 (1976); T. Kugo and I. Ojima, *Prog. Theor. Phys.* **60**, 1869 (1978); *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **66**, 1 (1979). また, 電磁理論の場合については参考文献 11*a* も見よ.

14. J. Thierry-Mieg, *J. Math. Phys.* **21**, 2834 (1980); R. Stora, *Progress in Gauge Theories: Proceedings of a Symposium at Cargèse*, 1983, G. 't Hooft, A. Jaffe, H. Lehmann, P. K. Mitter, I. M. Singer, R. Stora 編 (Plenum, New York, 1984) p. 543;

L. Bonora and P. Cotta-Ramusino, *Commun. Math. Phys.* **87**, 589 (1983); J. Mañes, R. Stora, and B. Zumino, *Commun. Math. Phys.* **102**, 157 (1985); A. S. Schwarz, *Commun. Math. Phys.* **155**, 249 (1993); P. M. Lavrov, P. Yu Moshhin and A. A. Reshetnyak, *Mod. Phys. Lett.* **A10**, 2687 (1995); P. M. Lavrov, *Phys. Lett.* **B366** 160 (1996).

15. W. Siegel, *Phys. Lett.* **93B**, 170 (1980); T. Kimura, *Prog. Theor. Phys.* **64**, 357 (1980); **65**, 338 (1981).

16. G. Barnich, F. Brandt, and M. Henneaux, *Commun. Math. Phys.* **174**, 57 (1995) 14 節.

17. G. Curci and R. Ferrari, *Nuovo Cimento* **32A**, 151 (1976); I. Ojima, *Prog. Theor. Phys.* **64**, 625 (1980); L. Baulieu and J. Thierry-Mieg, *Nucl. Phys.* **B197**, 477 (1982).

18. 反 BRST 変換を一般的な局所対称性に拡張するのは, L. Alvarez-Gaumè and L. Baulieu, *Nucl. Phys.* **B212**, 255 (1983) によって行われた. それは, 以下の演算子によって引き起こされる.

$$\bar{s} = \omega^{*A}\,\delta_A\phi^r\,\frac{\delta_L}{\delta\phi^r} - \frac{1}{2}\omega^{*B}\omega^{*C}\,f^A{}_{BC}\,\frac{\delta_L}{\delta\omega^{*A}}$$
$$-\omega^{*B}\,h^C\,f^A{}_{BC}\,\frac{\delta}{\delta h^A} + \left[-f^A{}_{BC}\omega^{*B}\omega^C + h^A\right]\frac{\delta_L}{\delta\omega^A}\,.$$

この変換のベキ零性,

$$\bar{s}^2 = 0$$

の証明は一本道だ. また, BRST 変換と反 BRST 変換は反可換だ. さらに, 反 BRST 変換については, BRST 変換のときと同じような, あるコホモロジー定理 (未発表) があり, ϕ^r, ω^A, ω^{*A}, h^A の最も一般的な汎関数 I で反 BRST 不変の条件 $\bar{s}I = 0$ を

満たし, ゴースト数がゼロのものは, 以下の形をとるということが証明できる.

$$I[\phi,\omega,\omega^*,h] = I_0[\phi] + \bar{s}\,\bar{\Psi}[\phi,\omega,\omega^*,h]\ .$$

(単に, t の代りに, ホッジ演算子 $\bar{t} \equiv \omega^A\,\delta/\delta h^A$ を使えば良い.) 反 BRST 対称性はラグランジアンとグリーン関数に可能な項を数え挙げるのには役立つが, それが不可欠な場合は知らない.

19. I. A. Batalin and G. A. Vilkovisky, *Phys. Lett.* **B102**, 27 (1981); *Nucl. Phys.* **B234**, 106 (1984); *J. Math. Phys.* **26**, 172 (1985). また, B. L. Voronov and I. V. Tyutin, *Theor. Math. Phys.* **50**, 218, 628 (1982) も見よ. 明晰な概観としては, J. Gomis, J. París and S. Samuel, *Phys. Rep.* **259**, 1 (1995) がある.

20. E. S. Fradkin and G. A. Vilkovisky, *Phys. Lett.* **B55**, 224 (1975); CERN report TH2332 (1977); I. A. Batalin and G. A. Vilkovisky, *Phys. Lett.* **B69**, 309 (1977); I. S. Fradkin and T. E. Fradkina, *Phys. Lett.* **B72**, 334 (1977). また, M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems* (Princeton University Press, Princeton, 1992) も見よ.

21. I. A. Batalin and I. V. Tyutin, *Phys. Lett.* **B356**, 373 (1995).

22. J. Zinn-Justin, *Trends in Elementary Particle Theory - International Summer Institute on Theoretical Physics in Bonn 1974* (Springer-Verlag, Berlin, 1975) p. 2.

23. D. Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen, and S. Ferrara, *Phys. Rev.*, **D13**, 3214 (1976); R. E. Kallosh, *Nucl. Phys.* **B141**, 141 (1978); B. de Wit and J. W. van Holten, *Phys. Lett.*, **B79**, 389 (1979); P. van Nieuwenhuizen *Phys. Rep.*, **68**, 189 (1981).

24. M. Henneaux and C. Teitelboim, 参考文献 20, 18.1.4 節.

25. E. P. Wigner, *Group Theory* (Academic Press, New York, 1959): pp. 76–8 (ウィグナー著「群論と量子力学」森田正人・玲子訳 吉岡書店 pp.90-92).

26. 原論文は, E. Cartan, *Sur la Structure des Groupes de Transformations Finis et Continue*, (Paris, 1894; 第 2 版 1933) だ. 教科書としては, たとえば, R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications* (Wiley, New York, 1974), 9 章がある.

第16章

外場の方法

しばしば, 古典的な外場のあるもとでの量子場の理論を考えると有益だ. その一つの理由は, 多くの物理的な状況で, 古典的な電磁場, 重力場, スカラー場などに真空期待値があるなどして, 実際に外場があることによる. (19章で見るように, そのようなスカラー場はラグランジアンの対称性の自発的な破れに重要な役割をする.) しかし, 実際に外場が存在しなくても, 仮想的な外場のもとでの物理的振幅を考えることで, 計算が非常に容易になる場合がある. この章では**量子的有効作用**から得られた頂点とプロパゲーターを使った「樹木」ダイアグラムを足し上げることによって多重ループ効果が全て取り込めることを示す. この有効作用は, 単に外場のもとでの1粒子既約な連結真空・真空振幅から得られる. 次の章では, 15章で始めた非可換ゲージ理論のくりこみ可能性の証明の完成と, 量子色力学での漸近自由性という重要な性質を確立するのに必要な電荷のくりこみ因子の計算との両方に, この形式が特に便利なことがわかる.

16.1 量子的有効作用

作用 $I[\phi]$ を持つ場の量子論を考え, 場 $\phi^r(x)$ に結合した古典的なカレント $J_r(x)$ の組を導入したとする. これらのカレントのもとでの完全な真空・真空振幅は, 以下で与えられる.

$$Z[J] \equiv \langle \text{VAC, out} | \text{VAC, in} \rangle_J$$
$$= \int \left[\prod_{s,y} d\phi^s(y) \right] \exp \left(iI[\phi] + i \int d^4x\, \phi^r(x)\, J_r(x) + [\epsilon \text{ 項}] \right) . \tag{16.1.1}$$

(場 $\phi^r(x)$ はスカラーである必要はない. それらはフェルミオン的でもよいが, 16.4 節まではその場合に現れる符号は気にしない.) $Z[J]$ を計算するためのファインマン則は, ϕ^r の線が一本だけ付いた頂点が新たに現れることを除けば, 外場が無いときの真空・真空振幅 $Z[0]$ を計算するときのものと同じだ. そのような頂点は, その座標が x のとき, 座標空間でのファインマン振幅に「結合」因子 $iJ_r(x)$ の寄与をする. これを言い換えれば, $Z[J]$ の J での冪展開で $iJ_r(x)\, iJ_s(y) \cdots$ に比例する項の係数は, 場 $\phi^r(x)$, $\phi^s(y)$ 等に対応する外線を (プロパゲーターも含めて) 持つダイアグラムの和だ. 特に, 一回微分は $\phi^r(x)$ に対応する量子力学的演算子 $\Phi^r(x)$ の真空行列要素を与える.

$$\left[\frac{\delta}{\delta J_r(y)} Z[J] \right]_{J=0} = i \int \left[\prod_{r,x} d\phi^r(x) \right] \phi^r(y) \exp \left\{ iI[\phi] + [\epsilon \text{ 項}] \right\}$$
$$= i \left\langle \text{VAC, out} \middle| \Phi^r(y) \middle| \text{VAC, in} \right\rangle_{J=0} . \tag{16.1.2}$$

場合によっては, (16.1.1) で定義される汎関数 $Z[J]$ において$\phi^r(x)$ を基本的な場 (つまり, 作用に現れる場) ではなく, そのような場の積とするときもある. $\phi^r(x)$ が N 個の基本的な場の積ならば, $Z[J]$ のファインマン則に現れる新しい頂点は N 本の線が付いたものだ. この章の幾つかの結果 ((16.1.2) を含む) はその場合にも当てはまる. しか

し, ファインマン・ダイアグラムが関与するところでは暗黙のうちに $\phi^r(x)$ が基本的な場だと仮定する.

さて, $Z[J]$ はカレント J のもとでの真空・真空振幅のすべてのダイアグラムの和だ. これには, 連結ダイアグラムも非連結ダイアグラムも含まれるが, 同じかまたは異なる連結部分ダイアグラムの中で頂点の置換のみで異なるダイアグラムは異なるものとして数えない. N 個の連結部分からなる一般的なダイアグラムは, $Z[J]$ にそれらの部分の寄与の積を $N!$ で割った項の寄与をする. この因子は, 一つの連結部分の全ての頂点を他の連結部分の全ての頂点と単に置換する場合の数だ.* したがって, 全てのダイアグラムの和は, 以下に等しい.

$$Z[J] = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \left(iW[J]\right)^N = \exp(iW[J]) \,. \tag{16.1.3}$$

ここで, $iW[J]$ は, 全ての連結真空・真空振幅のダイアグラムで, 前と同じく頂点の置換のみで異なるものは同じとして扱い, 和をとったものだ.

多くの目的のためには, もう一歩進んで, $W(J)$ の代りに全ての連結1粒子既約ダイアグラムの和を取り扱う方が有益だ. (1粒子既約なダイアグラムとは内線を1本切っても非連結にならないダイアグラムだ.) この和には以下のように形式的な表式を与えることができる. まず, 以下のようにカレント J があるもとでの演算子 $\Phi^r(x)$ の真空期待値 を $\phi^r_J(x)$ と定義する.

$$\phi^r_J(x) \equiv \frac{\langle \text{VAC, out}|\Phi^r(x)|\text{VAC, in}\rangle_J}{\langle \text{VAC, out}|\text{VAC, in}\rangle_J} = -\frac{i}{Z[J]}\,\frac{\delta}{\delta J_r(x)}\,Z[J] \,. \tag{16.1.4}$$

---

*ファインマン・ダイアグラムが N 個の連結部分を持ち, それらの連結部分が各々 $n_1,\ n_2, \cdots n_N$ 個の頂点を持つ場合を考える. このファインマン・ダイアグラムは, ダイソン展開から来る因子 $1/(n_1+\cdots n_N)!$ と, これらの頂点の置換の数 $(n_1+\cdots n_N)!/N!$ の因子を持つ. 後者は, 一つの連結部分の全ての頂点を単に他の全ての頂点と置換したものは同じと数えることによる.

これは, 連結ダイアグラムの和を使って,

$$\phi^r_J(x) = \frac{\delta}{\delta J_r(x)} W[J] \tag{16.1.5}$$

と書き換えることができる. この表式は逆を取ることができる. $J_{\phi r}(x)$ を (16.1.4) が $\phi^r(x)$ という決められた値をとるように選んだカレントとする.

$$\phi^r_J(x) = \phi^r(x), \qquad (J_r(x) = J_{\phi r}(x) \text{ のとき}) .$$

量子論的有効作用 (quantum effective action)[1] $\Gamma[\phi]$ は, (J ではなく ϕ の汎関数として) 以下のルジャンドル変換で定義される.

$$\Gamma[\phi] \equiv -\int d^4x\, \phi^r(x)\, J_{\phi r}(x) + W[J_\phi] . \tag{16.1.6}$$

すぐに, $\Gamma[\phi]$ がカレント J_ϕ のもとでの全ての連結 1 粒子既約ダイアグラムの和であることを示す. しかし, まずその物理的重要性の別の側面を見ておこう.

$\Gamma[\phi]$ の変分は以下で与えられる.

$$\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi^s(y)} = -\int d^4x\, \phi^r(x)\, \frac{\delta J_{\phi r}(x)}{\delta\phi^s(y)} - J_{\phi s}(y) + \int d^4x \left[\frac{\delta W[J]}{\delta J_r(x)}\right]_{J=J_\phi} \frac{\delta J_{\phi r}(x)}{\delta\phi^s(y)} .$$

これは, (16.1.5) を使うと,

$$\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi^s(y)} = -J_{\phi s}(y) \tag{16.1.7}$$

となる. したがって, $\Gamma[\phi]$ は, カレント J が無いときの外場 $\phi^s(y)$ のとれる値がΓ の停留「点」で与えられるという意味で「有効作用」になっている.

$$\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi^s(y)} = 0 \qquad (J = 0 \text{ に対して}) . \tag{16.1.8}$$

これは, 実際の作用 $I[\phi]$ を停留させることを要請する古典的な場の方程式と比べることができる. したがって, (16.1.8) は, 量子補正も取り込んだ外場 ϕ の運動方程式と見なすことができる.

$\Gamma[\phi]$ は量子補正を受けた場の方程式を与えるだけでなく, $I[\phi]$ の代りに $\Gamma[\phi]$ から求めた頂点を使って真空・真空振幅の連結樹木ダイアグラムの和として $iW[J]$ が計算できるという意味でも, 有効相互作用だ. 樹木ダイアグラムとは, どの内線を切っても非連結になるものを意味する. 全てのループ・ダイアグラムの影響は, $I[\phi]$ の代りに $\Gamma[\phi]$ を使うことによって取り込まれている.

これを見るには,[2] $I[\phi]$ の代りに作用 $g^{-1}\Gamma[\phi]$ を使うと得られる $W_\Gamma[J,g]$ を考える.

$$\exp\{iW_\Gamma[J,g]\} \equiv \int \prod_{r,x} d\phi^r(x)\ \exp\left\{i\, g^{-1}\Big[\Gamma[\phi] + \int d^4x\, \phi^r(x)\, J_r(x)\Big] + [\epsilon\,\text{項}]\right\}. \tag{16.1.9}$$

ここで g は任意定数だ. この場合, プロパゲーターは $g^{-1}\Gamma(\phi)$ の中のϕ について 2 次の項の係数の逆になるので, g に比例する. しかし, 頂点は全て $1/g$ に比例する寄与をするので, V 個の頂点 (カレント J によってできるものも含める) と, I 本の内線 (J の頂点に付いているものも含める) を持つダイアグラムは, g^{I-V} に比例する. 任意の連結ダイアグラムについて, ループの数は $L = I - V + 1$ であるから, $W_\Gamma[J,g]$ の L 個のループの項の g 依存性は,

$$\Big(W_\Gamma[J,g]\Big)_{L\ \text{loops}} \propto g^{L-1} \tag{16.1.10}$$

となる. したがって, (少なくとも形式的には),

$$W_\Gamma[J,g] = \sum_{L=0}^{\infty} g^{L-1} W_\Gamma^{(L)}[J] \tag{16.1.11}$$

と書くことができる. ここで, ($g=1$ とすればわかるように) $W_\Gamma^{(L)}[J]$ は $\Gamma[\phi]$ (因子 g 無しに) を作用 $I[\phi]$ の代りに使えば得られる連結真空振幅 $W_\Gamma[J,1]$ への L 個のループの寄与だ.

さて, ここでは特に, 作用を $I[\phi]$ ではなく $\Gamma[\phi]$ として計算した頂点とプロパゲーターを使って計算した樹木ダイアグラム, つまりループの無いダイアグラムの和に興味がある. ここでの記法では, それは $W_\Gamma^{(0)}[J]$ だ. (16.1.11) の $L=0$ 項を取り出すためには, $g\to 0$ の極限を考える. この極限では, 経路積分 (16.1.9) には位相の停留点が主な寄与をしている.

$$\exp\left\{i\,W_\Gamma[J,g]\right\}\propto\exp\left\{i\,g^{-1}\left[\Gamma[\phi_J]+\int d^4x\,\phi_J^r(x)\,J_r(x)\right]\right\}\,. \tag{16.1.12}$$

ここで, 場 ϕ_J はカレント J によって作られた場として定義されているので, 以下の意味で停留点になっている.

$$\left.\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi^r(x)}\right|_{\phi=\phi_J}=-J_r(x)\,. \tag{16.1.13}$$

(16.1.12) の比例定数は一般的には J の汎関数だが, g^0 の次数から始まる g の冪級数だ. したがって, 両辺の対数をとり, g^{-1} の次数の項を取り出すと,

$$W_\Gamma^{(0)}[J]=\Gamma[\phi_J]+\int d^4x\,\phi_J^r(x)\,J_r(x) \tag{16.1.14}$$

を得る. (16.1.6) において $\phi=\phi_J$ として, (16.1.14) の右辺がちょうど $W[J]$ に等しいことがわかる.

$$W_\Gamma^{(0)}[J]=W[J]\,. \tag{16.1.15}$$

要約すると, これは $W[J]$ が $I[\phi]$ の代りに $\Gamma[\phi]$ を使って (下の添字は Γ) 樹木 (0 ループ) ダイアグラムを計算して得られることを意味して

いる.

$$iW[J] = \int_{\substack{\text{CONNECTED}\\ \text{TREE}}} \left[\prod_{r,x} d\phi^r(x)\right] \exp\left\{i\,\Gamma[\phi] + i\int \phi^r(x)\,J_r(x)\,d^4x\right\} . \tag{16.1.16}$$

さて, $iW[J]$ の任意の連結ダイアグラムは, 頂点が 1 粒子既約部分ダイアグラムになっている樹木とみなすことができる. したがって, (16.1.16) が正しいためには, $i\Gamma[\phi]$ が, 任意の本数の外線を持ち各外線がプロパゲーターや波動関数に比例する代りに因子 ϕ を持つ, 1 粒子既約連結ダイアグラム全ての和に等しくなければならない. このため, $\Gamma[\phi]$ のある固定された場 ϕ_0 のまわりでの場とその微分についての冪展開の係数はくりこまれた結合定数と見なすことができる. そのくりこみ「点」はある運動量の集合ではなく, ϕ_0 によって決められている.

これと同等に, ある固定された場 $\phi_0^r(x)$ について $i\Gamma[\phi_0]$ は, ずらした作用 $I[\phi+\phi_0]$ を使って計算した真空・真空振幅の 1 粒子既約ダイアグラムの和と表せる.

$$i\,\Gamma[\phi_0] = \int_{\substack{\text{1PI}\\ \text{CONNECTED}}} \left[\prod_{r,x} d\phi^r(x)\right] \exp\left\{i\,I[\phi+\phi_0]\right\} . \tag{16.1.17}$$

これは, (16.1.17) の 1 粒子既約ダイアグラムの中で, どの頂点やプロパゲーターでも ϕ_0 が現れるところは全て, 外から ϕ の線が付けられるところでもあることによる. (1 粒子既約ダイアグラムに限ることは (16.1.17) で本質的だ. この制限が無ければ, 積分変数をずらして積分が明白に ϕ_0 に依らないようにできるからだ.) (16.1.17) の代りに, しばしば以下のように書くと便利だ.

$$\exp\left[i\,\Gamma[\phi_0]\right] = \int_{\text{1PI}} \left[\prod_{r,x} d\phi^r(x)\right] \exp\left\{i\,I[\phi+\phi_0]\right\} . \tag{16.1.18}$$

ここでは, 連結, 非連結を問わず, 連結部分が 1 粒子既約な全てのダイアグラムを含めて経路積分を計算する.

* * *

この形式は樹木ダイアグラムの和をとる簡単な方法を与える. 1 例として, 完全な 2 点関数 $\Delta^{rx,sy}$ とその 1 粒子既約部分 $\Pi_{rx,sy}$ の関係を考える. (16.1.5) と (16.1.7) から, 以下がわかる.

$$\Delta^{rx,sy} \equiv \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J_r(x)\,\delta J_s(y)} = \frac{\delta \phi^r_J(x)}{\delta J_s(y)}\,, \tag{16.1.19}$$

$$\Pi_{rx,sy} \equiv \frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta \phi^r(x)\,\delta \phi^s(y)} = -\frac{\delta J_{\phi\, r}(x)}{\delta \phi^s(y)}\,. \tag{16.1.20}$$

これよりすぐに,「行列」Δ と Π が以下の関係を満たすことがわかる.

$$\Delta = -\Pi^{-1}\,. \tag{16.1.21}$$

これはプロパゲーターと自己エネルギー部分のよく知られた関係 (10.3.15) に相当していて, (10.3.15) の分母に 1 粒子既約な 2 点関数の 0 次の項を表す $q^2 + m^2$ がある.

16.2　有効ポテンシャルの計算

前の節で述べた形式が実際にどのように働くかを見るために, 1 実スカラー場 $\phi(x)$ が以下のくりこみ可能な作用を持つ理論を考える.

$$I[\phi] = -\int d^4x\,\left[\lambda + \tfrac{1}{2}\partial_\rho\phi\partial^\rho\phi + \tfrac{1}{2}m^2\phi^2 + \tfrac{1}{24}\,g\phi^4\right]\,. \tag{16.2.1}$$

(ここには「宇宙定数」$-\lambda$ をラグランジアンに入れている. その理由は後で明らかになる.) 簡単のため, 位置に依存しない場 $\phi_0(x) = \phi_0$ のもとでの $\Gamma[\phi_0]$ を計算しよう. そのとき, $\Gamma[\phi_0]$ の各項は運動量保存のデルタ関数から生じる時空体積の因子を持つ.

$$\mathcal{V}_4 = \int d^4x = \delta^4(p-p)(2\pi)^4\,. \tag{16.2.2}$$

したがって, ϕ_0 が定数のとき,

$$\Gamma[\phi_0] = -\mathcal{V}_4 V(\phi_0) \tag{16.2.3}$$



図 16.1: 相互作用 ϕ^4 を持つ中性スカラー場 ϕ の理論において, 量子論的有効作用の 0,1,2 ループ項を与えるファインマン・ダイアグラム.

と書く. ここで, $V(\phi_0)$ は有効ポテンシャル (effective potential) と呼ばれる通常の関数だ. この節ではこの有効ポテンシャルを 1 ループの次数まで計算する. これはもとはコールマン (S. Coleman) とエリック・ワインバーグ (E. Weinberg)[3] によって, 19 章と 21 章で扱う自発的対称性の破れを調べる際に行われた. 彼らはまた, その結果をくりこみ群に応用したが, これはくりこみ群への応用としては初期のものにあたる. これは 18.2 節で述べる.

ϕ を ϕ_0 だけずらすと, (16.1.18) の作用は以下のようになる.*

$$\begin{aligned} I[\phi+\phi_0] = & -\mathcal{V}_4\left[\lambda + \tfrac{1}{2}m^2\phi_0^2 + \tfrac{1}{24}g\phi_0^4\right] - \left[m^2\phi_0 + \tfrac{1}{6}g\,\phi_0^3\right]\int d^4x\,\phi \\ & -\int d^4x\left[\tfrac{1}{2}\partial_\rho\phi\partial^\rho\phi + \tfrac{1}{2}\mu^2(\phi_0)\phi^2\right] \\ & -\int d^4x\left[\tfrac{1}{6}g\,\phi_0\phi^3 + \tfrac{1}{24}g\,\phi^4\right]\,. \end{aligned} \tag{16.2.4}$$

ここで, μ^2 は以下の場に依存した質量だ.

$$\mu^2(\phi_0) = m^2 + \tfrac{1}{2}\,g\phi_0^2 \tag{16.2.5}$$

ここでもとの作用と同じ構造の項に加えて, ϕ に比例する新たな相互作用 (これは 1 粒子既約なダイアグラムに何の影響も無い) と ϕ^3 に比例する新たな相互作用が現れることに注意しよう.

---

*$m^2 < 0$ では, 次の節で述べるように摂動論には適用限界がある.

$\Gamma[\phi_0]$ の 2 ループまでのファインマン・ダイアグラムを 16.1 図に示した．真空・真空振幅の 0 ループ項は単に $I[\phi+\phi_0]$ の定数項で与えられて，次のようになる．

$$i\,\Gamma^{(0\ \mathrm{loop})}[\phi_0] = -i\mathcal{V}_4\left(\lambda + \frac{1}{2}m^2\phi_0^2 + \frac{g}{24}\,\phi_0^4\right) . \tag{16.2.6}$$

1 ループ項は，

$$\exp\left(i\Gamma^{(1\ \mathrm{loop})}[\phi_0]\right) = \int\prod_x d\phi(x)\ \exp\Big\{-\tfrac{1}{2}\,i\int d^4x\Big[\partial_\rho\phi\partial^\rho\phi + \mu^2(\phi_0)\phi^2\Big] + [\epsilon\ 項]\Big\} \tag{16.2.7}$$

となる．9 章でこのような積分のやり方を学んだ．結果は (9.A.18) で与えられ，以下のようになる．

$$i\Gamma^{(1\ \mathrm{loop})}[\phi_0] = \ln\mathrm{Det}\left(\frac{iK}{\pi}\right)^{-1/2} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\ \ln\left(\frac{iK}{\pi}\right) . \tag{16.2.8}$$

この表式で，いまの場合は，

$$K_{x,y} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^\lambda\partial y_\lambda} + \mu^2(\phi_0) - i\epsilon\right]\delta^4(x-y) \tag{16.2.9}$$

となっている．いつものようにこのようなトレースを計算するには，運動量空間に移って「行列」K を対角化するとよい．

$$\begin{aligned} K_{p,q} &= \int \frac{d^4x}{(2\pi)^2}\,e^{-ip\cdot x}\,\frac{d^4y}{(2\pi)^2}\,e^{iq\cdot y}K_{x,y} \\ &= \left(p^2 + \mu^2(\phi_0) - i\epsilon\right)\delta^4(p-q) . \end{aligned} \tag{16.2.10}$$

この対角行列の対数は，主対角に対数を持ったものとなる．

$$\left[\ln\left(\frac{iK}{\pi}\right)\right]_{p,q} = \ln\left[\frac{i}{\pi}\left(p^2+\mu^2(\phi_0)-i\epsilon\right)\right]\ \delta^4(p-q) . \tag{16.2.11}$$

これにより，そのトレースは以下となる．

$$i\Gamma^{(1\ \mathrm{loop})}[\phi_0] = -\frac{1}{2}\int d^4p\left[\ln\left(\frac{iK}{\pi}\right)\right]_{p,p}$$

$$= -\frac{\mathcal{V}_4}{2(2\pi)^4} \int d^4p \ \ln\left(\frac{i}{\pi}\Big(p^2 + \mu^2(\phi_0) - i\epsilon\Big)\right) . \tag{16.2.12}$$

(16.2.6) と (16.2.12) から, 1 ループまでで以下の有効ポテンシャルが求まる.

$$V(\phi_0) = \lambda + \frac{1}{2}m^2\phi_0^2 + \frac{g}{24}\phi_0^4 \ + \ \mathcal{I}\Big(\mu^2(\phi_0)\Big) . \tag{16.2.13}$$

ここで,

$$\mathcal{I}(\mu^2) \equiv \frac{-i}{2(2\pi)^4} \int d^4p \ln\left(\frac{i}{\pi}[p^2 + \mu^2 - i\epsilon]\right) \tag{16.2.14}$$

と定義した.

残念なことに, この有効ポテンシャルの表式は紫外発散を含んでいることは明白だ. 幸い, これらは自然に理論のパラメータのくりこみにより吸収できる. 積分 (16.2.14) は発散するが, 単純な次数勘定によれば μ^2 について 3 回微分すれば収束することになる.

$$\mathcal{I}'''(\mu^2) = -\frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p \, (p^2 + \mu^2 - i\epsilon)^{-3} .$$

以前と同様に, $-i\epsilon$ 項は p^0 の積分路を反時計回りにまわさなければならないことを意味し, その結果 $p^0 = ip_4$ として p_4 は $-\infty$ から $+\infty$ まで変化する.

$$\mathcal{I}'''(\mu^2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^\infty \frac{2\pi^2 k^3 dk}{(k^2 + \mu^2)^3} = \frac{1}{32\pi^2\mu^2} .$$

これを 3 回積分し, 以下を得る.

$$\mathcal{I}(\mu^2) = \frac{\mu^4 \ln \mu^2}{64\pi^2} \ + \ A + B\,\mu^2 + C\mu^4 .$$

A, B, C の定数はこの計算法では決定できないが, これらの定数は明らかに発散しているのでこれは深刻な問題とはならない. これらの定

数は λ, m^2, g に「くりこまれた」値を与えることで以下のように消去する.

$$\lambda_R \equiv \lambda + A + Bm^2 + Cm^4 \ ,$$
$$m_R^2 \equiv m^2 + gB + 2gm^2C \ ,$$
$$g_R \equiv g + 6g^2C \ .$$

こうすると, 1 ループまででポテンシャルは, 以下のようになる.

$$V(\phi_0) = \lambda_R + \frac{1}{2}m_R^2\phi_0^2 + \frac{g_R}{24}\phi_0^4 + \frac{\mu^4(\phi_0)\ln\mu^2(\phi_0)}{64\pi^2} \ . \qquad (16.2.15)$$

ここで, $\mu(\phi_0)$ は (16.2.5) で定義された場に依存する質量であり, この次数までで, m と g の代りに m_R と g_R を使って,

$$\mu^2(\phi) = m_R^2 + \tfrac{1}{2}g_R\phi^2$$

と書かれている.

同様の結果はもし理論がスピン $\frac{1}{2}$ の複素フェルミオン場 $\psi(x)$ を持ち, それがスカラー ϕ と相互作用するときにも成り立つ. たとえば, もしこの相互作用ハミルトニアン密度が $G\phi\bar{\psi}\psi$ という単純な形であれば, 定数のスカラー背景場 ϕ_0 があるもとでのフェルミオンの質量 $M(\phi_0)$ は,

$$M(\phi_0) = M(0) + G\phi_0$$

という形となる. この場合には, ポテンシャル (16.2.15) が以下の付加的な寄与を受けることは簡単にわかる.

$$V(\phi_0) = \lambda_R + \frac{1}{2}m_R^2\phi_0^2 + \frac{g_R}{24}\phi_0^4 + \frac{\mu^4(\phi_0)\ln\mu^2(\phi_0)}{64\pi^2}$$
$$- \frac{M^4(\phi_0)\ln M^2(\phi_0)}{32\pi^2} \ . \qquad (16.2.16)$$

この新しい項の数値係数は (16.2.15) の $\mu^4\ln\mu^2$ の項の 2 倍になっているが, これは ψ が記述するフェルミオンが 2 つのスピン状態を持つ

ことによる. また, その符号は, (9章で見たように) ガウス関数のボソン的経路積分が指数関数の引数の係数行列の行列式の逆冪に比例する結果を与えるのに対し, ガウス関数のフェルミオン的経路積分がその行列式に比例する結果を与えることによる.

16.3 エネルギー解釈

有効作用 $\Gamma[\phi]$ とポテンシャル $V[\phi]$ には, それぞれ, エネルギーとエネルギー密度による重要な解釈が存在する.[4] これを見るには, カレント $J^n(\mathbf{x},t)$ が $t=-\infty$ でゼロから滑らかに生じ, 有限の値 $\mathcal{J}^n(\mathbf{x})$ をとり, その値で長い時間 T 続き, その後 $t=+\infty$ で滑らかにゼロになるとする. この摂動の影響は真空を特定のエネルギー $E[\mathcal{J}]$ ($\mathcal{J}^n(\mathbf{x})$ の汎関数) の状態に変化させ, それを長い時間 T 続け, その後ゼロに戻すことだ. しかし,「out」真空は「in」真空と同じ物理的状態だとはいえ, これらの状態ベクトルは時間 T だけの間に蓄積した位相 $\exp(-iE[\mathcal{J}]T)$ だけ異なる.

$$\langle \text{VAC, out}|\text{VAC, in}\rangle_J = \exp\Big(-iE[\mathcal{J}]T\Big)\,. \tag{16.3.1}$$

これを (16.1.1) と (16.1.3) と比べると,

$$W[J] = -E[\mathcal{J}]T \tag{16.3.2}$$

を得る.

このエネルギーと有効作用の関係を見るために, ある状態 Ω_ϕ を考え, それがエネルギー期待値,

$$\langle H\rangle_\Omega = \frac{(\Omega, H\Omega)}{(\Omega,\Omega)} \tag{16.3.3}$$

を, 量子場 $\Phi_n(\mathbf{x},t)$ が時間に依存しない期待値 $\phi_n(\mathbf{x})$,

$$\frac{(\Omega, \Phi_n(\mathbf{x},t)\Omega)}{(\Omega,\Omega)} = \phi_n(\mathbf{x}) \tag{16.3.4}$$

を持つという条件のもとで最小化することにする. また, Ω が,

$$(\Omega, \Omega) = 1 \tag{16.3.5}$$

と, 規格化されているという条件を付けておくと便利だ. 期待値 (16.3.3) を拘束条件 (16.3.4) と (16.3.5) のもとで最小化するには, ラグランジュ未定定数法を使い, Ω には拘束条件を付けずに,

$$(\Omega, H\Omega) - \alpha(\Omega, \Omega) - \int d^3x\, \beta^n(\mathbf{x}) \Big(\Omega, \Phi_n(\mathbf{x})\Omega\Big) \tag{16.3.6}$$

を最小化するのが便利だ. これにより,

$$H\Omega = \alpha\Omega + \int d^3x\, \beta^n(\mathbf{x})\Phi_n(\mathbf{x})\Omega \tag{16.3.7}$$

となる. α と $\beta^n(\mathbf{x})$ は共に拘束条件 (16.3.4) と (16.3.5) を満たすように選ばれるので, あらかじめ選んでおいた期待値 $\phi_n(\mathbf{x})$ に汎関数的に依存する.

さて, ハミルトニアン $H - \int d^3x\, \mathcal{J}^n(\mathbf{x})\, \Phi_n(\mathbf{x})$ はカレント $\mathcal{J}^n(\mathbf{x})$ のもとで固有値 $E[\mathcal{J}]$ を持つとした. つまり, その規格化された固有ベクトルを $\Psi_{\mathcal{J}}$ とすると,

$$\left[H - \int d^3x\, \mathcal{J}^n(\mathbf{x})\, \Phi_n(\mathbf{x})\right] \Psi_{\mathcal{J}} = E[\mathcal{J}]\Psi_{\mathcal{J}} \tag{16.3.8}$$

となっている. さらに, このカレントをゆっくり生じさせて真空をこのエネルギー固有値に変化させるので, $E[\mathcal{J}]$ はこのカレントのもとでの最低エネルギー固有値だと仮定できる. したがって, (16.3.4), (16.3.5), (16.3.7) は,

$$\Omega = \Psi_{\mathcal{J}_\phi}\ , \tag{16.3.9}$$

$$\alpha = E[\mathcal{J}_\phi]\ , \tag{16.3.10}$$

$$\beta^n(\mathbf{x}) = \mathcal{J}^n_\phi(\mathbf{x}) \tag{16.3.11}$$

によって満たされている．ここで，$\mathcal{J}_\phi(\mathbf{x})$ は $\Phi(\mathbf{x})$ の状態 $\Psi_{\mathcal{J}}$ での期待値が $\phi(\mathbf{x})$ となるようなカレントだ．

(16.3.8) において $\mathcal{J} = \mathcal{J}_\phi$ とし，$\Psi_{\mathcal{J}_\phi}$ とのスカラー積をとって，場 Φ_n が期待値 ϕ_n を持つという拘束条件のもとでの最低エネルギーは，

$$\langle H\rangle_\Omega = E[\mathcal{J}_\phi] + \int d^3x\, \mathcal{J}^n_\phi(\mathbf{x})\phi_n(\mathbf{x}) \tag{16.3.12}$$

であることがわかる．(16.3.2) と $J(x)$ の仮定した形から，これは，

$$\langle H\rangle_\Omega = \frac{1}{T}\Big[-W[J_\phi] + \int d^4x\, J^n_\phi(\mathbf{x})\phi_n(\mathbf{x})\Big] = -\frac{1}{T}\,\Gamma[\phi] \tag{16.3.13}$$

となる．

前の節で述べたように，もし場 $\phi(x)$ が大きな時空の体積 $\mathcal{V}_4 = \mathcal{V}_3 T$ 上で定数値 ϕ を持つなら，有効作用を有効ポテンシャル $V(\phi)$ を使って以下のように書ける．

$$\Gamma[\phi] = -\mathcal{V}_3 T\, V(\phi)\ . \tag{16.3.14}$$

この場合は，(16.3.13) からエネルギー密度が，

$$\langle H\rangle_\Omega/\mathcal{V}_3 = V(\phi) \tag{16.3.15}$$

となることがわかる．これが主要な結果だ．$V(\phi)$ はスカラー場 Φ_n が期待値 ϕ_n を持つという条件で拘束された全ての状態の中で，エネルギー密度の期待値の最小値になっている．これから得られる一つの結果は，外からのカレントが無ければ，真空状態が緩和する状態は，場の方程式 (16.1.8) で要求されるようにポテンシャル $V(\phi)$ が停留する状態であるのみならず，ポテンシャルが最低の状態だということだ．

この結果は量子論的有効ポテンシャルの解釈を決定するのに役立つ．経路積分のユークリッド版では (23 章の補遺 A に述べるが) 2 点関数 Δ が (行列の意味で) 正であり，(16.1.21) によって $-\Pi = \Delta^{-1}$ も正となることが明白だ．(16.2.3) も使うと，これはスカラー場が一つ

あるとき有効ポテンシャル $V(\phi)$ は ϕ についての 2 回微分が正 (またはゼロ) で無ければならないことを意味する. より一般的には, 有効ポテンシャルは下に凸でなければならない.[5]

$$V\Big(\lambda\phi_1 + (1-\lambda)\phi_2\Big) \leq \lambda V(\phi_1) + (1-\lambda)V(\phi_2) \quad (0 \leq \lambda \leq 1 \text{ のとき}) .$$

しかし, (16.2.13) を見ると, $m^2 < 0$ と $g > 0$ では, 作用 (16.2.1) を持つスカラー場の理論での有効ポテンシャルのゼロ・ループ近似では, ϕ が有効ポテンシャルの二つの極小値 $\pm\sqrt{6|m^2|/g}$ の間では負定値の 2 回微分を持つことがわかる. この矛盾は, 摂動論を導出する際には暗黙の内に安定な真空があることを仮定しているにもかかわらず, $V''(\phi) < 0$ のときには場 ϕ の値 $\tilde{\phi}$ が $V(\tilde{\phi}) - J_\phi\tilde{\phi}$ が極小値ではなく極大値をとるところにあり, カレント J_ϕ のもとでの真空状態が不安定であることにある.

ならば, $m^2 < 0$ で ϕ がポテンシャルの二つの極小値の間にあるとき, このスカラー場の理論での真の有効ポテンシャルは何だろうか? この節の結果は, 演算子 Φ の期待値が ϕ に等しい状態の中で最低のエネルギーを持つものを見つけなければならないということだ. ϕ がポテンシャルの二つの極小値の間にある限り, 状態を ϕ が最低値 $\phi \simeq \pm\sqrt{6|m^2|/g}$ をとる二つの状態の適切な 1 次結合にとって, Φ に期待値 ϕ を与えることができる. この状態のエネルギーは極小値でのエネルギーに等しいので, この状態は明らかにエネルギーを極小化する. (ここでの干渉項は体積が無限大の極限でゼロとなる. その理由は 19.1 節で説明する.) したがって, ポテンシャルの二つの極小値の間での有効ポテンシャルは定数であり, 2 回微分が正でないという条件を満たす. 同じ議論によれば, ポテンシャルが二つの局所的な極小値を持ち, それらのエネルギーが等しくないときには, これらの極小値の間のポテンシャルは線形だということがわかる.[6]

16.4 有効作用の対称性

全てではないが幾つかの場合には, 作用 $I[\phi]$ の対称性は自動的に有効作用 $\Gamma[\phi]$ の対称性にもなっている. たとえば, 16.2 節の例では, 作用 (16.2.1) は離散的変換 $\phi \to -\phi$ のもとでの対称性を持っている. したがって, 定義より $Z[J]$ と $W[J]$ は対応する反転 $J \to -J$ のもとで偶だ. これと (16.1.5) より, $\phi_{-J} = -\phi_J$, したがって $J_{-\phi} = -J_\phi$ となる. ゆえに, (16.1.6) から $\Gamma[\phi]$ が $\phi \to -\phi$ のもとで偶であることがわかる. これは 1 ループの結果 (16.2.15) で成立している. (16.2.16) でのフェルミオンの寄与も, $M(0) = 0$ という特別の場合には$\phi \to -\phi$ のもとで対称となっている. これは, この場合には作用が $\phi \to -\phi$, $\psi \to \gamma_5\psi$ という同時変換のもとで不変だからだ.

作用が持つ対称性が有効作用についても成立することが示さなければ, 理論のくりこみ可能性を確立するのが困難となる. たとえば, 上の例ではもし $I[\phi]$ が ϕ について偶だが $\Gamma[\phi]$ がそうではなければ, Γ の $\int d^4x\,\phi$ と $\int d^4x\,\phi^3$ に比例する項の係数は発散するだろうが, 作用の対称性によりこれらの発散を吸収する相殺項は禁止されている.

このような動機により, 以下の微少変換で生成される重要な対称性の類を調べることにする.

$$\chi^n(x) \to \chi^n(x) + \epsilon F^n[x;\chi]\,. \tag{16.4.1}$$

ここで F^n は x^μ の関数であり, χ^n に汎関数的に依存する. (たとえば, $F^n[x;\chi]$ は点 x での χ^n とその微分の通常の関数が考えられる.) ここで, 異なるタイプの場を示すために, ϕ^r ではなく記号 χ^n を使っている. これはこれらが通常のゲージ場と物質場 (これらは次の章では $\phi^r(x)$ と書く) のみならず, ゲージ固定された作用に現れるゴースト場も含む全ての場を意味することを強調するためだ. これらの $\chi^n(x)$ はスカラーに限らず任意の種類であってよいことを繰り返して述べて

おく.

作用と測度は共に対称性変換 (16.4.1) のもとで不変だとする.

$$I[\chi + \epsilon F] = I[\chi] \,, \tag{16.4.2}$$

$$\prod_{n,x} d\Big(\chi^n(x) + \epsilon F^n[x;\chi]\Big) = \prod_{n,x} d\chi^n(x) \,. \tag{16.4.3}$$

(実際には積 $(\prod_{n,x} d\chi^n(x))\exp(iI)$ が不変なだけでよいが, これが成立しているときには, 通常 (16.4.2) と (16.4.3) がそれぞれ成立している.) (16.1.1) の積分変数を $\chi^n(x) + \epsilon F^n[x;\chi]$ で置き換えて, 以下を得る.

$$\begin{aligned}
Z[J] &= \int \left[\prod_{n,x} d\Big(\chi^n(x) + \epsilon F^n[x;\chi]\Big)\right] \\
&\quad \times \exp\left\{ i\, I[\chi + \epsilon F] + i \int d^4x \, \Big(\chi^n(x) + \epsilon F^n[x;\chi]\Big) J_n(x) \right\} \\
&= \int \left[\prod_{n,x} d\chi^n(x)\right] \exp\left\{ i\, I[\chi] \right. \\
&\qquad \left. + i \int d^4x \, \Big(\chi^n(x) + \epsilon F^n[x;\chi]\Big) J_n(x) \right\} \\
&= Z[J] + i\epsilon \int \left(\prod_{n,x} d\chi^n(x)\right) \int F^n[y;\chi] J_n(y)\, d^4y \\
&\quad \times \exp\left\{ i\, I[\chi] + i \int d^4x \, \chi^n(x) J_n(x) \right\} \,.
\end{aligned}$$

したがって,

$$\int d^4y \, \langle F^n(y) \rangle_J \, J_n(y) = 0 \tag{16.4.4}$$

となる. ここで, $\langle\ \rangle_J$ はカレント $J_n(x)$ のもとでの量子平均を意味する.

$$Z[J]\langle F^n(y)\rangle_J \equiv \int \left(\prod_{n,x} d\chi^n(x)\right) F^n[y;\chi]$$

$$\times \exp\left\{ i\, I[\chi] + i \int d^4x\, \chi^n(x) J_n(x) \right\} . \tag{16.4.5}$$

これは $\langle 1 \rangle_J = 1$ と規格化されている. しかし, $J_n(y)$ は有効作用 $\Gamma[\chi]$ から (16.1.7) で与えられていた.

$$J_{n,\chi}(y) = -\frac{\delta\Gamma[\chi]}{\delta\chi^n(y)} .$$

したがって, (16.4.4) は以下のように書ける.

$$0 = \int d^4y\, \langle F^n(y) \rangle_{J_\chi} \frac{\delta\Gamma[\chi]}{\delta\chi^n(y)} . \tag{16.4.6}$$

これは, $\Gamma[\chi]$ が以下の無限小変換のもとで不変なことを意味する.

$$\chi^n(y) \to \chi^n(y) + \epsilon \langle F^n(y) \rangle_{J_\chi} . \tag{16.4.7}$$

このような対称性条件はスラブノフ・テイラー恒等式 (Slavnov–Taylor identity)[7]として知られている.

この対称性変換は, 最初に出発したものと同じだろうか? これは, 線形変換という非常に重要な類の微小対称性変換のもとではそうなっている. そのような対称性については, F は,

$$F^n[x;\chi] = s^n(x) + \int t^n{}_m(x,y) \chi^m(y) d^4y \tag{16.4.8}$$

で与えられる. (最も普通の場合では $s^n(x)$ はゼロとなり, $t^n{}_m(x,y)$ は定数行列に $\delta^4(x-y)$ をかけたものだ.) 任意の線形の F に対して,

$$\langle F^n(x) \rangle_J = s^n(x) + \int t^n{}_m(x,y) \langle \chi^m(y) \rangle_J\, d^4y$$

が成立する. しかし, 任意の固定した χ について, J_χ は $\langle \chi^m(y) \rangle_J$ を $\chi^m(y)$ に等しくするカレント J の値として定義されている. したがって,

$$\langle F^n(x) \rangle_{J_\chi} = s^n(x) + \int t^n{}_m(x,y) \chi^m(y)\, d^4y = F^n[x;\chi] \tag{16.4.9}$$

となる．これより，(16.4.6) は $\Gamma[\chi]$ が $I[\chi]$ と測度を不変にする全ての汎関数線形変換 $\chi^n \to \chi^n + \epsilon F^n$ のもとで不変であることを要請する．

ときによっては線形でない対称性変換を扱わなければならないことがある．一つの重要な例は 15.7 節で論じた BRST 変換だ．非線型変換では，有効作用を不変にする対称性変換 (16.4.7) は一般的に元の作用を不変にする対称性変換 (16.4.1) とは異なる．これは，一般的に場の非線形汎関数の平均は平均場の汎関数と同じではないことによる．実際，χ の汎関数としての $\langle F\rangle_{J_\chi}$ の形は，一般に系の力学的な性質に依存し，通常は非局所的だ．この複雑な問題は次の章で反括弧の方法を使って扱う．

* * *

これまでは暗黙の内に場 χ^n，それに対応した変換関数 F^n，カレント J_n は全てボソン的だと仮定してきた．これらのどれかがフェルミオン的ならば符号因子を注意して扱わなければならない．これは特に超対称性や BRST 変換について起こり，その場合は ϵ がフェルミオン的で χ^n と F^n は逆の統計性を持っている．(16.1.1) と (16.4.5) のようにカレントを場の右に入れると，(16.1.5) と (16.1.7) は以下の形で成立する．

$$\frac{\delta_R W[J]}{\delta J_m(y)} = \chi_J^m(y)\,, \tag{16.4.10}$$

$$\frac{\delta_L \Gamma[\chi]}{\delta \chi^m(y)} = -J_{\chi,m}(y)\,. \tag{16.4.11}$$

ここで添字 R と L はそれぞれ微分が右と左から働くことを意味している．そのため，スラブノフ・テイラー恒等式 (16.4.6) は以下のように書かれる．

$$0 = \int d^4y\, \langle F^n(y)\rangle_{J_\chi} \frac{\delta_L \Gamma[\chi]}{\delta \chi^n(y)}\,. \tag{16.4.12}$$

問題

1. 質量 M の実擬スカラー $\phi(x)$ と質量 m の複素ディラック場 $\psi(x)$ が相互作用 $g\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi$ をする理論を考える. ϕ が定数で $\psi=0$ の有効ポテンシャルを 1 ループまでで求めよ.

2. $\Gamma[\phi]$ の ϕ に関する変分導関数を使って, $\delta^3 W[J]/\delta J_n(x)\,\delta J_m(y)\,\delta J_\ell(z)$ と $\delta^4 W[J]/\delta J_n(x)\,\delta J_m(y)\,\delta J_\ell(z)\,\delta J_k(w)$ を表せ. また, その表式の各項に対応するファインマン・ダイアグラムを示せ.

3. 6 次元時空において, 中性スカラー場 ϕ が相互作用ラグランジアン密度 $g\phi^3/6$ を持つとき, 有効ポテンシャルを 1 ループまでで求めよ.

4. 作用 $I[\phi]$ が有限の行列変換 $\phi_n(x) \to \sum_m M_{nm}\phi_m(x)$ のもとで不変とする. $W[J]$ が不変となるカレントの変換は何か？この結果を使い $\Gamma[\phi]$ の対称性を導け.

参考文献

1. 有効作用 $\Gamma[\phi]$ は, J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **127**, 965 (1962) によって, 1 粒子既約連結ダイアグラムの和として摂動的に導入された. 非摂動的定義 (16.1.6) を最初に導入したのは, G. Jona-Lasinio, *Nuovo Cimento* **34**, 1790 (1964) だ.

2. S. Coleman, *Aspects of Symmetry* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985) pp. 135–6.

3. S. Coleman and E. Weinberg, *Phys. Rev.* **D7**, 1888 (1973).

4. K. Symanzik, *Comm. Math. Phys.* **16**, 48 (1970); S. Coleman, *Aspects of Symmetry* (Cambridge University Press, Cambridge,

1985) pp 139-42.

5. K. Symanzik, 参考文献 4; J. Iliopoulos, C. Itzykson, and A. Martin, *Rev. Mod. Phys.* **47**, 165 (1975).

6. Y. Fujimoto, L. O'Raifeartaigh, and G. Parravicini, *Nucl. Phys.* **B212**, 268 (1983); R. W. Haymaker and J. Perez-Mercader, *Phys. Rev.* **D27**, 1948 (1983); C. M. Bender and F. Cooper, *Nucl. Phys.* **B224**, 403 (1983); M. Hindmarsh and D. Johnston, *J. Math. Phys.* **A19**, 141 (1986); V. Branchina, P. Castorina, and D. Zappalà, *Phys. Rev.* **D41**, 1948 (1990); K. Cahill, *Phys. Rev.* **D52**, 4704 (1995).

7. A. A. Slavnov, *Theor. Math. Phys.* **10**, 152 (1972) [英訳は *Theor. and Math. Phys.* **10**, 99 (1972)]; J. C. Taylor, *Nucl. Phys.* **B33**, 436 (1971).

第 17 章

ゲージ理論のくりこみ

この章ではゲージ理論に戻って, 前の章で説明した外場の形式を使ってこれらの理論のくりこみ可能性を調べ, また重要な計算を行う.

17.1 ジン・ジュスタン方程式

この節では 15.7 節で説明した BRST 対称性を使って量子論的有効作用の基本的な性質を示す. これはジン・ジュスタンによって初めて導出された.[1] 16.4 節で概説した一般的規則に従うと, 作用 $I[\chi]$ に BRST 不変性があれば有効作用 $\Gamma[\chi]$ には以下の条件が課される.

$$\int d^4x \, \langle \Delta^n(x) \rangle_{J_\chi} \frac{\delta_L \Gamma[\chi]}{\delta \chi^n(x)} = 0 \, . \qquad (17.1.1)$$

ここで, 微小なフェルミオン的パラメータ θ をもつ BRST 変換のもとでの $\chi^n(x)$ の変化は,

$$\delta_\theta \chi^n(x) = \theta \Delta^n(x) \qquad (17.1.2)$$

であり, $\langle \cdots \rangle_{J_\chi}$ はカレント J_χ が存在することによって, 場の演算子 $X^n(x)$ の真空期待値が c 数関数 $\chi^n(x)$ になるときの真空期待値を表

す．式中の n についての和は BRST 形式の全ての場についてとる．すなわち，15.8 節で ϕ^r と総称したゲージ場と物質場だけでなく ω_α, ω^*_α, h_α についても和をとる．χ^n がゲージ場，物質場，または ω_α の場合には $\Delta^n(x)$ は場について 2 次なので，(17.1.1) から一般に作用を不変にする BRST 変換のもとで有効作用が不変だというわけではない．

この複雑な問題を処理するために，任意のベキ零対称変換を取り扱うのに有用な処法を採用する．まず，c 数の外場の組 $K_n(x)$ を導入し，新しい作用を以下で定義する．

$$\Gamma[\chi, K] \equiv W[J_{\chi,K}, K] - \int d^4x\, \chi^n(x)\, J_{\chi,K\, n}(x)\,. \tag{17.1.3}$$

ここで連結真空遷移振幅 W はゲージ固定された作用* $I + \int d^4x\, \Delta^n K_n$ を使って次のように計算する．

$$e^{iW[J,K]} \equiv \int \left[\prod_{n,x} d\chi^n(x)\right] \exp\left(iI + i\int d^4x\, \Delta^n K_n + i\int d^4x\, \chi^n J_n\right)\,. \tag{17.1.4}$$

また $J_{\chi,K}$ は外場 K のもとで場が期待値 χ を持つようにとったカレントだ．

$$\left.\frac{\delta_R W[J,K]}{\delta J_n(x)}\right|_{J=J_{\chi,K}} \equiv \chi^n(x)\,. \tag{17.1.5}$$

(K_n は Δ^n と同じフェルミオンまたはボソンの統計性を持たねばならない．これは χ^n とは逆の統計性だ．) BRST 変換はベキ零なので，$\Delta^n(x)$ は BRST 不変だ．よって 16.4 節と同様にして新しい有効作用 $\Gamma[\chi, K]$ が以下の BRST 不変条件を満たすことを示せる．

$$\int d^4x\, \langle\Delta^n(x)\rangle_{J_{\chi,K},K} \frac{\delta_L \Gamma[\chi, K]}{\delta\chi^n(x)} = 0\,. \tag{17.1.6}$$

ここで $\langle\cdots\rangle_{J,K}$ はカレント J と外場 K のもとで計算した真空期待値

*ここで I は 15.7 節で説明したようにゴースト場 ω_α, 反ゴースト場 ω^*_α, 補助場 h_α に依存するように変更された作用 $I_{\rm NEW}$ だが，以後「NEW」の添字は省略する．

を表す.

$$\langle \mathcal{O}[\chi] \rangle_{J,K} = \frac{\int \left[\prod_{n,x} d\chi^n(x)\right] \mathcal{O}[\chi] \, \exp\left(iI + i\int d^4x \, \Delta^n K_n + i\int d^4x \, \chi^n J_n\right)}{\int \left[\prod_{n,x} d\chi^n(x)\right] \exp\left(iI + i\int d^4x \, \Delta^n K_n + i\int d^4x \, \chi^n J_n\right)} . \tag{17.1.7}$$

Δ^n の期待値を有効作用の汎関数微分として表すと便利だ. (17.1.3) の K についての右汎関数微分をとると,

$$\frac{\delta_R \Gamma[\chi, K]}{\delta K_n(x)} = \left.\frac{\delta_R W[J,K]}{\delta K_n(x)}\right|_{J=J_{\chi,K}} + \int d^4y \left.\frac{\delta_R W[J,K]}{\delta J_m(y)}\right|_{J=J_{\chi,K}} \frac{\delta_R J_{\chi,K\,m}(y)}{\delta K_n(x)} - \int d^4y \, \chi^m(y) \frac{\delta_R J_{\chi,K\,m}(y)}{\delta K_n(x)}$$

が得られる. (17.1.5) を使うと最後の 2 項が相殺するので, 定義 (17.1.4) と (17.1.7) から求める関係式が得られる.

$$\frac{\delta_R \Gamma[\chi, K]}{\delta K_n(x)} = \left.\frac{\delta_R W[J,K]}{\delta K_n(x)}\right|_{J=J_{\chi,K}} = \langle \Delta^n(x) \rangle_{J_{\chi,K}\,,K} \, . \tag{17.1.8}$$

すると BRST 対称性条件 (17.1.6) は有効作用のみを含む簡単な条件,

$$\int d^4x \, \frac{\delta_R \Gamma[\chi, K]}{\delta K_n(x)} \frac{\delta_L \Gamma[\chi, K]}{\delta \chi^n(x)} = 0 \tag{17.1.9}$$

として書ける. これはジン・ジュスタン方程式 (Zinn–Justin equation) と呼ばれる. (15.9.3) の後で述べたように, 場と反場 (この場合は χ^n と K_n) の交換は単に (17.1.9) の左辺の符号を変えるだけなので, これは,

$$(\Gamma, \Gamma) = 0 \tag{17.1.10}$$

と書ける. ここでは反括弧は χ^n の反場の代わりに K_n を使って計算する.

$$(F,G) \equiv \int d^4x \, \frac{\delta_R F[\chi,K]}{\delta\chi^n(x)} \frac{\delta_L G[\chi,K]}{\delta K_n(x)} - \int d^4x \, \frac{\delta_R F[\chi,K]}{\delta K_n(x)} \frac{\delta_L G[\chi,K]}{\delta\chi^n(x)} \tag{17.1.11}$$

これは形式的には 15.9 節で議論したバタリン・ビルコビスキーの「マスター方程式」と同じだが, ここでは基本作用 $S[\chi,\chi^\ddagger]$ の拘束条件ではなく量子論的有効作用 $\Gamma[\chi,K]$ の拘束条件として登場する. ジン・ジュスタン方程式 (17.1.10) を使って, 次の 2 節でゲージ理論のくりこみの方法を示し, 22.6 節でゲージ理論のアノマリーを調べる.

17.2 くりこみ: 直接的解析

もっとも単純な非可換ゲージ理論は, ラグランジアン密度の演算子が全て (質量の冪で) 4 以下の次元だという「ダイソン」の意味でくりこみ可能だ. 12 章で見たように, このことから, 量子論的有効作用の無限大は次元 4 以下の相互作用の相殺項で打ち消せる項にしか現れないことが保証される. しかしくりこみ可能性のためにはこれ以上のことを示す必要がある. ラグランジアン密度はゲージ不変性とその他の対称性とにより制約を受ける. 理論がくりこみ可能であるためには, 量子論的有効作用に現れる無限大が場のくりこみを受ける以外には, 同じ制約を満たす必要がある.[2]

有効作用 $\Gamma[\chi,K]$ は χ と K との両方の複雑な汎関数であり, 対称性条件 (17.1.9) はそれについて複雑なことを述べているが, 幸い Γ の無限大項については話ははるかに簡単だ. 作用 $S[\chi,K] \equiv I[\chi] + \int d^4x \, \Delta^n K_n$ を, 質量と結合定数をくりこまれた値に等しく置いた項 $S_R[\chi,K]$ とそれへの補正項 $S_\infty[\chi,K]$ との和として書くことにする. 後者はループ・ダイアグラムから生じる無限大を打ち消すための相殺項を含む.

S_R と S_∞ はともに元の作用 $S[\chi, K]$ の対称性を持つように選ばなければならないので, 問題は Γ への高次の寄与の無限大部分が同じ対称性を持ち S_∞ の相殺項で打ち消すことが出来るか否かだ.

Γ は 1 連の項 Γ_N に展開できる.

$$\Gamma[\chi, K] = \sum_{N=0}^{\infty} \Gamma_N[\chi, K] . \tag{17.2.1}$$

ここで Γ_N には二つの寄与がある. その第 1 はちょうど N 個のループを持つダイアグラムであり, 第 2 は $N-M$ 個のループ $(1 \le M \le N)$ を持つダイアグラムのうち, M 個のループを持つダイアグラムの無限大を打ち消すために使われる $S_\infty[\chi, K]$ の様々な相殺項を含むダイアグラムだ. すると対称性条件 (17.1.10) は各 N について次のようになる.*

$$\sum_{N'=0}^{N} (\Gamma_{N'}, \Gamma_{N-N'}) = 0 . \tag{17.2.2}$$

和 (17.2.1) で最初の項は単に $\Gamma_0[\chi, K] = S_R[\chi, K]$ で, これはもちろん有限だ. 全ての $M \le N-1$ について, M ループ・ダイアグラムから生じる全ての無限大は S_∞ の相殺項で打ち消されていると仮定する. すると, (17.2.2) に現れることのできる無限大は $N' = 0$ と $N' = N$ の項のみで, それらはお互いに等しい. よって, この条件の無限大部分より Γ_N の無限大部分 $\Gamma_{N,\infty}$ には,

$$(S_R, \Gamma_{N,\infty}) = 0 \tag{17.2.3}$$

---

*そのような各次数毎の関係式は 16.1 節の理由付けを繰り返して形式的に導くことができる. 作用 S_R を $g^{-1}S_R$ で置き換えると, I 本の内線と V 個の頂点を持つ連結 L ループ・ダイアグラムからの寄与には因子 $g^{V-I} = g^{L-1}$ がかかる. S_∞ の N ループ・ダイアグラムに対応する相殺項もまた因子 g^N を持つなら, Γ_L は g^{L-1} 次項の $g = 1$ での値だ. すると (17.1.10) が g の各次数で成り立つことを要請すれば (17.2.2) が成り立つことになる. cgs 単位系では作用は $\hbar$ と同じ次元を持つので, 経路積分に現れるときには因子 $1/\hbar$ がかかっており, $\hbar$ をループ数を数えるパラメータとして g の代わりに使うこともできる.

の条件が課される. これは, ちょうど (15.9.16) と (15.9.17) で記述されているように S_R により生成される対称性原理だ. 特に変換 $X \mapsto (S_R, X)$ は場 χ^n にだけでなく外場 K_n にも作用することに留意して欲しい.

これまでのところ, くりこみ可能なヤン・ミルズ理論の特別な性質はまったく使っていない. くりこみ可能な理論の次数勘定の一般論から, Γ_N の部分ダイアグラムの全ての無限大が相殺していれば, $\Gamma_N[\chi, K]$ の無限大部分 $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$ は場 (K を含めて) とその微分の次元 (質量の冪で) が 4 以下の積の和のみだ. 最後に, 16.4 節の議論より, $\Gamma[\chi, K]$ は作用を不変にする全ての線形の対称性変換のもとで不変であり, よって $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$ も不変だ. (以下で述べるように, これらは, ローレンツ変換, 大域的ゲージ変換, 反ゴーストの並進, ゴースト数保存にともなうゴーストの位相変換だ. もちろん, 補助場 K_n にはこれらの対称性変換で適切な変換性を付与しなければならない.) これらの条件と (17.2.3) があれば $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$ の構造について必要な全てのことを知るのに十分だ.

これらの条件を満たすには, 外場 K_n の次元を知る必要がある. 場 χ^n が次元 d_n (つまり質量の d_n 乗) を持てば, Δ^n は (BRST 変換則 (15.7.7)–(15.7.11) を見れば分かるように) 次元 $d_n + 1$ を持つ. よって $\int d^4x\, K_n \Delta^n$ が無次元であるためには, K_n は次元 $3 - d_n$ を持たねばならない. 場 $A^{\alpha\mu}$, ω^α, $\omega^{\alpha *}$ は全て次元 $d_n = +1$ を持つので, 対応する K_n は全て次元 $+2$ を持つ. (場 h^α は BRST 不変なので, これに対応する外場は導入しない.) 任意のスピン 1/2 の物質場 ψ_ℓ は次元 3/2 を持つので, 対応する K_n は次元 3/2 を持つ. こうして $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$ のような次元 4 の量は K_n のどれについてもせいぜい 2 次だ. さらに K_n について 2 次の項は, スピン 1/2 の物質場について 2 次の場合にさらに次元 1 の場をせいぜい 1 個含むことができる以外, 他の場を含むことはできない.

次に, ゴースト数の保存を使って実際には $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$ は K_n について 2 次の項を含まないことが示せる. それには, K_n のゴースト量子数も知る必要がある. もし χ^n がゴースト量子数 γ_n を持てば, Δ^n はゴースト量子数 $\gamma_n + 1$ を持つので, K_n にはゴースト量子数 $-\gamma_n - 1$ を割り当てねばならない. 場 $A^{\alpha,\mu}$, ψ^ℓ, ω^α, $\omega^{\alpha*}$ のゴースト量子数はそれぞれ 0, 0, +1, −1 なので, 対応する外場 K_n はそれぞれゴースト量子数 −1, −1, −2, 0 を持つ. これより $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$ には K_n の 2 次項は存在できない. 可能な例外は $\omega^{\alpha*}$ にともなう外場 K^*_α の 2 次項(ただし他の場は含まない)に限る. しかしながら, この最後に残った項も別の理由で禁止される. $\omega^{\alpha*}$ の BRST 変換は,

$$\Delta^{\alpha*} = -h^\alpha \tag{17.2.4}$$

のように場について線形なので,

$$\frac{\delta_L \Gamma[\chi, K]}{\delta K^*_\alpha} = \langle \Delta^{\alpha*} \rangle_{J_\chi, K} = -h^\alpha$$

は K^*_α に依らない. したがって $\Gamma[\chi, K]$ は $K^{\alpha,*}$ について 1 次で, $-\int d^4x \; K^*_\alpha h^\alpha$ という項を通じてのみ $K^{\alpha,*}$ に依存する. (K^*_α と h^α はともにボソン的なので, 両者の順序は重要ではない.) 特に, $N > 0$ については $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$ は $K^{\alpha*}$ に依らない.

$\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$ は全ての K_n についてせいぜい 1 次であることを見た. それを以下のように書く.

$$\Gamma_{N,\infty}[\chi, K] = \Gamma_{N,\infty}[\chi, 0] + \int d^4x \, \mathcal{D}^n_N[\chi; x] \, K_n(x) \, . \tag{17.2.5}$$

また S_R の K 依存性は次のとおりだった.

$$S_R[\chi, K] = S_R[\chi] + \int d^4x \, \Delta^n[\chi; x] K_n(x) \, .$$

よって (17.2.3) の K についてゼロ次と 1 次の項はそれぞれ,

$$\int d^4x \; \left[\Delta^n[\chi; x] \, \frac{\delta_L \Gamma_{N,\infty}[\chi, 0]}{\delta \chi^n(x)} + \mathcal{D}^n_N[\chi; x] \, \frac{\delta_L S_R[\chi]}{\delta \chi^n(x)} \right] = 0 \tag{17.2.6}$$

と,

$$\int d^4x \left[\Delta^n(\chi;x)\frac{\delta_L \mathcal{D}^m_N(\chi;y)}{\delta\chi^n(x)} + \mathcal{D}^n_N(\chi;x)\frac{\delta_L \Delta^m(\chi;y)}{\delta\chi^n(x)}\right] = 0 \tag{17.2.7}$$

を与える.** これらの関係式は ϵ を微小量として,

$$\Gamma_N^{(\epsilon)}[\chi] \equiv S_R[\chi] + \epsilon\Gamma_{N,\infty}[\chi, 0] \tag{17.2.8}$$

と,

$$\Delta_N^{(\epsilon)n}(x) \equiv \Delta^n(x) + \epsilon\mathcal{D}^n_N(x) \tag{17.2.9}$$

を導入すると, より明瞭になる. そうすると, (17.2.6) より (S_R の BRST 不変性とあわせて) ちょうど $\Gamma_N^{(\epsilon)}[\chi]$ が変換,

$$\chi^n(x) \to \chi^n(x) + \theta\Delta_N^{(\epsilon)n}(x) \tag{17.2.10}$$

のもとで不変であり, 他方 (17.2.7) より (元の BRST 変換のベキ零性とあわせて) この変換がベキ零だと分かる.

次にこのベキ零変換がどのような形をしているのかを考察しなければならない. すでに述べたように, $\Gamma_{N,\infty}$ は次元 4 以下の項のみから成るので, $\mathcal{D}^n_N$ はせいぜい元の BRST 変換関数 $\Delta^n(x)$ の次元しか持たず, したがって $\Delta_N^{(\epsilon)n}(x)$ も同様だ. また, $\mathcal{D}^n_N$ は $\Delta^n(x)$ と同じローレンツ変換性とゴースト量子数を持たねばならず, したがって $\Delta_N^{(\epsilon)n}(x)$ もまた同様だ. よって変換 (17.2.10) の最も一般的な形は以下のとおりだ.

$$\psi \to \psi + i\theta\omega^\alpha T_\alpha \psi\,,$$

**(17.2.6) と (17.2.7) の第 2 項がこのような形になるのは, χ^n と K_n が逆の統計性を持つために, 任意のボゾン的な汎関数 A と B について,

$$\frac{\delta_R A}{\delta\chi^n}\frac{\delta_L B}{\delta K_n} = -\frac{\delta_L A}{\delta\chi^n}\frac{\delta_R B}{\delta K_n} = -\frac{\delta_R B}{\delta K_n}\frac{\delta_L A}{\delta\chi^n}$$

が成り立つからだ.

$$A_{\alpha\mu} \to A_{\alpha\mu} + \theta\left[B_{\alpha\beta}\partial_\mu\omega_\beta + D_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}\omega_\gamma\right] ,$$
$$\omega_\alpha \to \omega_\alpha - \tfrac{1}{2}\,\theta E_{\alpha\beta\gamma}\omega_\beta\omega_\gamma .$$

ここで T_α はスピノル場に作用する行列で, $B_{\alpha\beta}$, $D_{\alpha\beta\gamma}$, $E_{\alpha\beta\gamma}$ は定数だ. ただし $E_{\alpha\beta\gamma}$ は β と γ について反対称だ. また, ω^*_α と h_α の変換は線形であり, よって変わらない.

$$\omega^*_\alpha \to \omega^*_\alpha - \theta h_\alpha , \qquad h_\alpha \to h_\alpha .$$

次にベキ零性の条件を課す. 最も重要な要求は $E_{\alpha\beta\gamma}\omega_\beta\omega_\gamma$ が不変だということだ. これは $E_{\alpha\beta\gamma}E_{\beta\delta\epsilon}\omega_\delta\omega_\epsilon\omega_\gamma$ がゼロになることを要求し, よって $E_{\alpha\beta\gamma}E_{\beta\delta\epsilon}$ の δ, ϵ, γ について完全反対称な部分がゼロになることを要求する.

$$E_{\alpha\beta\gamma}E_{\beta\delta\epsilon} + E_{\alpha\beta\epsilon}E_{\beta\gamma\delta} + E_{\alpha\beta\delta}E_{\beta\epsilon\gamma} = 0 .$$

しかしこれはちょうど $E_{\alpha\beta\gamma}$ があるリー代数 $\mathcal{E}$ の構造定数であることを示している. $\epsilon \to 0$ で $E_{\alpha\beta\gamma}$ は元のゲージ・リー代数 $\mathcal{A}$ の構造定数 $C_{\alpha\beta\gamma}$ になるのだから, $\mathcal{E}$ は $\mathcal{A}$ と同じでなければならず, 構造定数 $E_{\alpha\beta\gamma}$ は元の $C_{\alpha\beta\gamma}$ と定数倍異なることだけが可能だ.[†]

$$E_{\alpha\beta\gamma} = \mathcal{Z}C_{\alpha\beta\gamma} .$$

(これは単純ゲージ群の場合だ. 一般の場合には各単純部分群について別々の因子 $\mathcal{Z}$ が現れる.)

次に, 変換 (17.2.10) がゲージ場に作用するときのベキ零性の条件に移る. $B_{\alpha\beta}\partial_\mu\omega_\beta + D_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}\omega_\gamma$ が不変だという条件から,

$$D_{\alpha\beta\gamma}D_{\beta\delta\epsilon} - D_{\alpha\beta\epsilon}D_{\beta\delta\gamma} = E_{\beta\epsilon\gamma}D_{\alpha\delta\beta} = \mathcal{Z}C_{\beta\epsilon\gamma}D_{\alpha\delta\beta}$$

[†] 大域的ゲージ変換不変性の要求から, $E_{\alpha\beta\gamma}$ と $C_{\alpha\beta\gamma}$ との関係に自明でない相似変換は存在し得ない.

と,

$$B_{\alpha\beta}E_{\beta\gamma\delta} = D_{\alpha\beta\delta}B_{\beta\gamma}$$

が得られる. 最初の条件は一意的に決まり,[††]

$$D_{\alpha\beta\gamma} = \mathcal{Z}C_{\alpha\beta\gamma}$$

となる. 2番目の条件より, 行列 $B_{\alpha\beta}$ は, ゲージ群の随伴表現と可換であり, よって(構造定数を完全反対称に選んでいるので)クロネッカー・デルタに比例しなければならない. ここで比例係数を $\mathcal{Z}\mathcal{N}$ と書くことにする.

$$B_{\alpha\beta} = \mathcal{Z}\mathcal{N}\delta_{\alpha\beta} .$$

最後に, 変換 (17.2.10) がフェルミオン場(もしあればの話だが)に作用するときのベキ零性の条件より, $\omega^\alpha T_\alpha \psi$ が不変だ. これより,

$$[T_\beta, T_\gamma] = iE_{\alpha\beta\gamma}T_\alpha$$

となり, よって T_α は元のラグランジアンでの生成子 t_α と因子 $\mathcal{Z}$ だけ異なる.

$$T_\alpha = \mathcal{Z}t_\alpha .$$

このようにして, 新しい定数 $\mathcal{Z}$ と $\mathcal{N}$ が現れることを除いて, 変換 (17.2.10) は以下のように, まさに我々が出発したBRST変換となる.

$$\psi \to \psi + i\mathcal{Z}\theta\omega^\alpha t_\alpha \psi , \tag{17.2.11}$$

$$A_{\alpha\mu} \to A_{\alpha\mu} + \mathcal{Z}\theta\left[\mathcal{N}\partial_\mu\omega_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}\omega_\gamma\right] , \tag{17.2.12}$$

$$\omega_\alpha \to \omega_\alpha - \tfrac{1}{2}\,\mathcal{Z}\,\theta\, C_{\alpha\beta\gamma}\omega_\beta\omega_\gamma , \tag{17.2.13}$$

$$\omega^*_\alpha \to \omega^*_\alpha - \theta h_\alpha , \tag{17.2.14}$$

$$h_\alpha \to h_\alpha . \tag{17.2.15}$$

[††] 行列 $(D_\gamma)_{\alpha\beta} \equiv D_{\gamma\alpha\beta}/\mathcal{Z}$ はゲージ・リー代数 $[D_\gamma, D_\epsilon] = C_{\beta\epsilon\gamma}D_\beta$ の交換関係を満たす. しかし $\mathcal{A}$ の随伴表現と同じ次元および $\mathcal{A}$ 変換性を持つ単純リー代数の表現は随伴表現自身しかない.

次にこの対称性を使って変更された作用 (17.2.8) の構造に制約を加えなければならない. この作用は, 元のくりこまれた作用と N ループの寄与の無限大部分との和のみを含むので, 以下のようにラグランジアン密度の積分でなければならない.

$$\Gamma_N^{(\epsilon)} = \int d^4x\, \mathcal{L}_N^{(\epsilon)} \,. \tag{17.2.16}$$

ここで $\mathcal{L}_N^{(\epsilon)}$ は場とその微分の局所的な関数で次元が (質量の冪で) 4 以下のものだ. さらに 16.4 節で見たように, $\mathcal{L}_N^{(\epsilon)}$ は場に線形に作用する元のラグランジアンの全ての対称性のもとで不変だ. これらの対称性を同定するには, 一般化された ξ ゲージで, (15.7.6) の「新しい」ラグランジアン密度は, (15.6.16) で $-(\partial_\mu A^\mu_\alpha)(\partial_\nu A^\nu_\alpha)/2\xi$ の項を (15.7.6) の $h_\alpha f_\alpha + \frac{1}{2}\xi h_\alpha h_\alpha$ の項で置き換えて得られる形,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\rm NEW} = \mathcal{L}_{\rm M} - \tfrac{1}{4}\, F^{\mu\nu}_\alpha F_{\alpha\mu\nu} - \partial_\mu\omega^*_\alpha\,\partial^\mu\omega_\alpha \\ +C_{\alpha\beta\gamma}(\partial_\mu\omega^*_\alpha)\,A^\mu_\gamma\,\omega_\beta + h_\alpha\partial_\mu A^\mu_\alpha + \tfrac{1}{2}\,\xi h_\alpha h_\alpha\end{aligned} \tag{17.2.17}$$

をしていることを思い出せばよい. この式を見ると以下の線形の対称性があることが分かる.

(1) **ローレンツ不変性** .

(2) **大域的ゲージ不変性** : つまり, ϵ^α を定数の微小パラメータとした変換,

$$\delta\psi_\ell(x) = i\,\epsilon^\alpha(t_\alpha)_\ell{}^m\psi_m(x)\,, \tag{17.2.18}$$

$$\delta A^\beta{}_\mu(x) = C_{\beta\gamma\alpha}\epsilon^\alpha A^\gamma{}_\mu(x)\,, \tag{17.2.19}$$

$$\delta\omega_\beta(x) = C_{\beta\gamma\alpha}\epsilon^\alpha\omega_\gamma(x)\,, \tag{17.2.20}$$

$$\delta\omega^*_\beta(x) = C_{\beta\gamma\alpha}\epsilon^\alpha\omega^*_\gamma(x)\,, \tag{17.2.21}$$

$$\delta h_\beta(x) = C_{\beta\gamma\alpha}\epsilon^\alpha h_\gamma(x) \tag{17.2.22}$$

のもとでの不変性.

(3) **反ゴーストの並進不変性**：つまり, c_α を任意の定数パラメータとした変換,

$$\omega^*_\alpha(x) \to \omega^*_\alpha(x) + c_\alpha \, . \tag{17.2.23}$$

のもとでの不変性.

(4) **ゴースト数の保存**：つまり, ω_α は $+1$, ω^*_α は -1, 他の全ての場は 0 としたゴースト数の保存.

次に, 次元が 4 以下の項のみから構成されるという意味でくりこみ可能で, 上の線形に作用する対称性を持ち, 変更された BRST 変換 (17.2.11)–(17.2.15) のもとで不変な最も一般的なラグランジアン密度の構造を調べよう.

(17.2.17) から, 場 A^μ_α, ω_α, ω^*_α, h_α はそれぞれ $+1$, $+1$, $+1$, $+2$ の次元 (質量の冪で) を持つことが分かる. またゴースト数の保存より ω と ω^* は対で現れる必要がある. 一方, 反ゴーストの並進不変性より ω^* は常に微分の形で現れなければならない. 場 ω と $\partial_\mu\omega^*$ の各対は次元が合わせて 3 なので, くりこみ可能性よりそのような対が 2 個以上現れることは排除される. そのような対が 1 個あればそれにはせいぜい 1 個の微分か 1 個のゲージ場が付け加わるだけで, またローレンツ不変性よりどちらか一方は付け加わらなければならない. するとゴースト場を含む唯一のくりこみ可能な許される相互作用は $\partial_\mu\omega^*_\alpha\,\partial^\mu\omega_\beta$ の形の項と $\partial_\mu\omega^*_\alpha\,A^\mu_\gamma\,\omega_\beta$ の形の項との線形結合だ.

次に, 場 h_α を含み, かつそれ以外の場も可能だが ω と ω^* は含まない項を考える. 場 h_α は次元 $+2$ を持つので, くりこみ可能性とローレンツ不変性よりこの場は, 別の h_β か $\partial_\mu A^\mu_\beta$ か $A^\mu_\beta A_{\mu\gamma}$ との積として現れることのみが可能だ.‡

‡スカラー場を含む理論でも, h_α に 1 個または 2 個のスカラー場がかかったくり

最後に, ラグランジアンは物質場とゲージ場のみを含むくりこみ可能な項を含む. これらの項の和を $\mathcal{L}_{\psi A}$ と呼ぶことにする. これらを合わせて大域的なゲージ不変性を使うと, (BRST 不変性の他に) 仮定された対称性から許される最も一般的なくりこみ可能な相互作用は,

$$\mathcal{L}_N^{(\epsilon)} = \mathcal{L}_{\psi A} + \tfrac{1}{2}\xi' h_\alpha h_\alpha + c h_\alpha \partial_\mu A_\alpha^\mu - e_{\alpha\beta\gamma} h_\alpha A_\beta^\mu A_{\gamma\mu}$$
$$-Z_\omega(\partial_\mu \omega_\alpha^*)(\partial_\mu \omega_\alpha) - d_{\alpha\beta\gamma}(\partial_\mu \omega_\alpha^*)\omega_\beta A_\gamma^\mu \qquad (17.2.24)$$

の形をとる. ここで ξ', Z_ω, c, $d_{\alpha\beta\gamma}$, $e_{\alpha\beta\gamma}$ は未知の定数で, 大域的なゲージ不変性や $e_{\alpha\beta\gamma} = e_{\alpha\gamma\beta}$ のような明らかな対称性以外には制約はない. (以前に述べたように, 簡単のためにゲージ群は単純群だと仮定しているが, 単純ゲージ群と $U(1)$ ゲージ群との直和への拡張は容易だ. 例えば, $h_\alpha h_\alpha$ に比例する 1 個の項の代わりに, ゲージ群の各単純部分群ごとにそのような項が 1 個ずつある和になる.)

次に BRST 不変性を課す. $\delta\mathcal{L}_N^{(\epsilon)}$ の $\theta\partial_\mu h_\alpha \partial^\mu \omega_\alpha$ に比例する項が相殺するためには,

$$c = Z_\omega / \mathcal{Z}\mathcal{N} \qquad (17.2.25)$$

が必要だ. $\delta\mathcal{L}_N^{(\epsilon)}$ の $\theta\,\partial_\mu h_\alpha\,\omega_\beta A_\gamma^\mu$ (あるいは $\theta\partial_\mu \omega_\alpha^* \omega_\beta \partial^\mu \omega_\gamma$) に比例する項が相殺するためには,

$$d_{\alpha\beta\gamma} = -(Z_\omega/\mathcal{N})\, C_{\alpha\beta\gamma} \qquad (17.2.26)$$

が必要だ. $\delta\mathcal{L}_N^{(\epsilon)}$ の $\theta\partial_\mu \omega_\alpha^*\, \omega_\beta\, \omega_\gamma\, A_\delta^\mu$ に比例する項は構造定数のヤコビ恒等式により自動的に相殺する. $\delta\mathcal{L}_N^{(\epsilon)}$ の $\theta h_\alpha \partial_\mu \omega_\beta A_\gamma^\mu$ (あるいは $\theta h_\alpha A_\beta^\mu A_{\gamma\mu} \omega_\delta$) に比例する項の相殺より,

$$e_{\alpha\beta\gamma} = 0 \qquad (17.2.27)$$

こみ可能な項が可能だ. そのような項は問題を生じないが, 簡単のためここでは考えない.

となる．最後に，微小変換 (17.2.10) の物質場とゲージ場への効果は，ゲージ・パラメータが $\epsilon_\alpha = \mathcal{Z}\mathcal{N}\theta\omega_\alpha$ であり，ゲージ結合が因子 $1/\mathcal{N}$ でくりこまれた(すなわち，t_α と $C_{\alpha\beta\gamma}$ を $\tilde{t}_\alpha \equiv t_\alpha/\mathcal{N}$ と $\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma} \equiv C_{\alpha\beta\gamma}/\mathcal{N}$ で置き換えた) 局所ゲージ変換と同じだ．よって，$\delta\mathcal{L}_N^{(\epsilon)}$ の項のうち ω_α の因子を 1 個だけ含み h_α や ω_α^* の因子を含まない項が相殺することは，単にこれらの場のラグランジアン $\mathcal{L}_{\psi,A}$ がゲージ不変で，くりこまれたゲージ結合を持つことを意味する．こうして結局，仮定した対称性原理から許される最も一般的なくりこまれたラグランジアン密度は次のとおりだ．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_N^{(\epsilon)} = &-\tfrac{1}{4}Z_A\tilde{F}_\alpha^{\mu\nu}\tilde{F}_{\alpha\mu\nu} - Z_\psi\bar{\psi}\gamma^\mu[\partial_\mu - i\tilde{t}_\alpha A_{\alpha\mu}]\psi - \bar{\psi}m_\psi\psi \\ &+\tfrac{1}{2}\xi' h_\alpha h_\alpha + (Z_\omega/\mathcal{N}\mathcal{Z})h_\alpha\partial_\mu A_\alpha^\mu \\ &-Z_\omega(\partial_\mu\omega_\alpha^*)(\partial_\mu\omega_\alpha) + Z_\omega\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma}(\partial_\mu\omega_\alpha^*)\omega_\beta A_\gamma^\mu\,. \end{aligned} \tag{17.2.28}$$

ここで $\tilde{F}_\alpha^{\mu\nu}$ のチルダーは場の強度がくりこまれた構造定数 $\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma} \equiv C_{\alpha\beta\gamma}/\mathcal{N}$ を使って計算されることを示す．しかし新しい定数係数が幾つか現れた以外には，これは出発点のラグランジアンと同じだ．このラグランジアンの新しい定数は (ゲージ結合定数を含めて) 元のくりこまれていないラグランジアンの対応する定数の N 次項を調整することで自由にずらすことができる．特に，$\Gamma_N^{(\epsilon)} = S_R$ となるようにこれらの項を調整することができ，その場合には $\Gamma_{N,\infty} = 0$ となる．これで証明が完成した．

* * *

上の証明では，ゲージ固定されたラグランジアン (17.2.17) が反ゴースト並進変換 (17.2.23) のもとでたまたま不変であることを大いに使った．この対称性はゲージ固定関数が $f_\alpha = \partial_\mu A_\alpha^\mu$ 以外のもので，時空微分でない場合には存在しない．ローレンツ不変性と大域的ゲージ不変性を保つしばしば引用される例は $f_\alpha = \partial_\mu A_\alpha^\mu + a_{\alpha\beta\gamma}A_\beta^\mu A_{\gamma\mu}$ だ．ここ

で, $a_{\alpha\beta\gamma}$ は β と γ について対称な定数行列で, 大域的ゲージ変換のもとでテンソルとして変換する. (そのような定数テンソルは $N \geq 3$ の全ての $SU(N)$ 群に存在する.) 他のより重要な例は 17.4 節で導入する背景ゲージ固定汎関数だ.

反ゴースト並進不変性が無いことは, $\mathcal{L}_N^{(\epsilon)}$ が場と場の微分の次元 4 以下のローレンツ不変で大域的ゲージ不変な局所関数で, くりこまれた BRST 変換 (17.2.11)–(17.2.15) のもとで不変だという議論には影響しない. しかし反ゴースト並進不変性が無いと, $\mathcal{L}_N^{(\epsilon)}$ にこれらの条件を満たす新しい項が存在する. 変換 (17.2.11)–(17.2.15) はベキ零なので, $s'F$ のような項を作ることができる. ここで変換 (17.2.11)–(17.2.15) は $\chi^n \to \chi^n + \theta s' \chi^n$ と書かれ, F はローレンツ不変および大域的ゲージ不変でゴースト数 -1 の任意関数だ. そのような項の一つは,

$$a_{\alpha\beta\gamma} s' \Big(\omega^*_\alpha A_{\beta\mu} A^\mu_\gamma\Big) = \\ -a_{\alpha\beta\gamma}\left[h_\alpha A_{\beta\mu} A^\mu_\gamma + 2\mathcal{Z}\omega^*_\alpha (\mathcal{N}\partial_\mu \omega_\beta + C_{\beta\delta\epsilon} A_{\delta\mu}\omega_\delta) A^\mu_\gamma\right]$$

だが, 問題はない. これはちょうどゲージ固定関数 f_α の $a_{\alpha\beta\gamma} A^\mu_\beta A_{\gamma\mu}$ から生じる通常のくりこまれたゴースト項とゲージ固定項だ. しかし, 別の,

$$b_{\alpha\beta\gamma} s' \Big(\omega^*_\alpha \omega^*_\beta \omega_\gamma\Big) = -b_{\alpha\beta\gamma}\left[2h_\alpha \omega^*_\beta \omega_\gamma + \tfrac{1}{2}\mathcal{Z} C_{\gamma\delta\epsilon}\omega^*_\alpha \omega^*_\beta \omega_\delta \omega_\epsilon\right]$$

の形をした項も可能だ. ここで $b_{\alpha\beta\gamma}$ は α と β について反対称な定数で, 大域的ゲージ変換のもとでテンソルとして変換する. (そのようなテンソルはどのリー群にも存在する. 例えば, $b_{\alpha\beta\gamma}$ を $C_{\alpha\beta\gamma}$ に比例するようにとることができる.) しかしファデーフ・ポポフ・ド・ウィットの方法では 4 個のゴーストの相互作用はラグランジアンに出てくることができないので, この項の紫外発散を吸収するのに使える相殺項が存在しない. これはくりこみ可能性を証明するうえで技術的な障害だというだけではない. $f_\alpha = \partial_\mu A^\mu_\alpha + a_{\alpha\beta\gamma} A^\mu_\beta A_{\gamma\mu}$ のようなゲージ固

定関数の場合, 1 ループ・ダイアグラムは実際 4 ゴースト振幅に, ファデーフ・ポポフ・ド・ウィットのラグランジアンの相殺項では打ち消すことのできない発散を生じる.

$f_\alpha = \partial_\mu A^\mu_\alpha$ 以外のゲージ固定関数を避けるという方法を除けば, この問題の唯一の解決策は 15.7 節で述べた方法だと思われる. つまり, ファデーフ・ポポフ・ド・ウィットの方法をあきらめて, 代わりに作用を最初から, ゲージ場, 物質場, ゴースト場, 補助場の関数で理論の BRST 対称性およびその他の対称性のもとで不変な最も一般的なくりこみ可能なものにとらなければならない. 15.8 節の議論にしたがって, I_0 がゴーストを含まないとして, 作用は $I_0 + s\Psi$ の形に書くことができ, S 行列は Ψ に依らない. よって, ゴーストとの相互作用がない軸性ゲージでゲージ理論を量子化し, Ψ を任意のものにとることで, このやり方を正当化できる. 特に, 4 ゴースト頂点での発散の相殺項の役割をする $s(\omega^*\omega^*\omega)$ 項を作用に含めることができる.

17.3 くりこみ: 一般のゲージ理論*

前節での非可換ゲージ理論のくりこみ可能性の証明は作用の次元が 4 以下の可能な項の「力まかせの」解析に基づいていた. しかし 12 章で見たように, 作用項の次元に関するこの制約はせいぜいよい近似にしかすぎない. 強・弱・電磁相互作用を記述するのに使われて成功しているくりこみ可能な場の量子論は有効場の理論であり, 次元 $d > 4$ の項を含むことはほとんど確実だ. これらの項は通常観測されない. なぜなら多分 $10^{16} - 10^{18}$ GeV の程度の非常に大きな何らかの質量の $4 - d$ 次の冪で抑えられているからだ. 重力もまた有効場の理論で記述できる. そこではラグランジアン密度はアインシュタイン・ヒルベ

*この節はこの本の議論の本筋からは多少外れているので, 最初読むときには飛ばしてもよい.

ルト項 $-\sqrt{g}R/16\pi G$ だけでなく, 重力場の 4 回以上の微分から作られる全てのスカラーを含む. この種のゲージ理論は, 次数勘定の意味ではくりこみ可能ではないが, それにもかかわらず紫外発散がゲージ対称性で支配されていて, その結果あらゆる発散を打ち消すために使える相殺項が存在するようになっているという現代的な意味でくりこみ可能であることを示す必要がある.[3]

この目的で, 15.9 節で導入した作用 $S[\chi,\chi^\ddagger]$ に戻ろう. これは 独立な場 χ^n (ゲージ場と物質場 ϕ^r, ゴースト場 ω^A および最低変数でない場 ω^{A*} と h^A を含む) とそれらの反場 $\chi^\ddagger_n$ の関数だ. 量子重力理論やヤン・ミルズ理論のような構造定数 $f^C{}_{AB}$ の閉じたゲージ代数に基づく理論では, この作用は,

$$S = I[\phi] + \omega^A\, f^r_A[\phi]\,\phi^\ddagger_r + \tfrac{1}{2}\,\omega^A\omega^B\, f^C{}_{AB}[\phi]\,\omega^\ddagger_C - h^A\,\omega^{*\ddagger}_A \qquad (17.3.1)$$

の形に制約される. ここで $I[\phi]$ は微小ゲージ変換 $\phi^r \to \phi^r + \epsilon^A f^r_A[\phi]$ のもとで不変だ. (15.9 節のように, 添字 r, A 等は時空座標を含み, それについては添字の和のなかで積分する.)

ここではこの形の作用に限定しないが, 理論には局所対称性が課されていて, 作用は (17.3.1) を単なる 1 例とする反場依存性についての「構造上の条件」に従わなければならないとする. 構造上の条件は線形で, もしそれが $S+\mathcal{S}_1$ と $S+\mathcal{S}_2$ について満たされれば, α_1, α_2 を任意定数として $S+\alpha_1\mathcal{S}_1+\alpha_2\mathcal{S}_2$ についても満たされるとする. また量子マスター方程式 (15.9.35),

$$(S,S) - 2i\hbar\Delta S = 0 \qquad (17.3.2)$$

を課す. ここで ΔS は (15.9.34) で定義されており, 因子 $\hbar$ は前節の脚注で説明した意味での「ループ勘定」のパラメータとして明示してある.

作用は $\hbar$ の冪級数として,

$$S = S_R + \hbar S_1 + \hbar^2 S_2 + \cdots \tag{17.3.3}$$

と書く. ここで S_R は S と同じ一般的な形の作用だが全ての結合パラメータが有限なくりこまれた値で置き換えられており, S_N は無限大の相殺項の組だ. 作用 S は $\hbar$ の全ての値について量子マスター方程式 (17.3.2) を満たすと考えているので, S_R は古典マスター方程式,

$$(S_R, S_R) = 0 \tag{17.3.4}$$

を満たし, 相殺項は,

$$\Big(S_R, S_N\Big) = -\tfrac{1}{2} \sum_{M=1}^{N-1} \Big(S_M, S_{N-M}\Big) + i\Delta S_{N-1} \tag{17.3.5}$$

を満たす.

相殺項 S_N はそれだけではループ・ダイアグラムの紫外発散を打ち消すのに十分ではない. 場の通常のくりこみの一般化として, 任意の反正準変換により元の場および反場から定義されたくりこまれた場および反場も導入しなければならない. 微小反正準変換は微小母汎関数 δF を使って (15.9.26) で定義される. よって一連の反正準変換 $G(t) \to G(t+\delta t) = G(t) + (F(t)\delta t, G(t))$ ($G(t)$ は場と反場の任意の汎関数で, $F(t)$ は母汎関数) の結果, 有限の正準変換 $G \to \tilde{G} \equiv G(1)$ が得られる. ここで,

$$\frac{d}{dt}G(t) = (F(t), G(t))\,, \qquad G(0) = G \tag{17.3.6}$$

だ. もし $F(t)$ が冪級数,

$$F(t) = \hbar F_1 + \hbar^2 t^2 F_2 + \cdots \tag{17.3.7}$$

で与えられるなら, (17.3.3), (17.3.6), (17.3.7) より, 変換された作用は,

$$\tilde{S} = S_R + \hbar\Big[S_1 + (F_1, S_R)\Big] + \hbar^2\Big[S_2 + (F_1, S_1)$$

$$+(F_2, S_R) + \tfrac{1}{2}(F_1, (F_1, S_R))\Big] + \cdots \quad (17.3.8)$$

となる. 問題は可能な自由度を使って, ループ・ダイアグラムから生じる全ての無限大を相殺するように F_N と S_N を選ぶことができるかどうかだ.

すでに指摘したように, (17.3.3) の第 1 項 S_R は自動的に有限だ. $M < N$ を満たす S_M と F_M を使って無限大を打ち消すことで, 量子論的有効作用の $M < N$ を満たす $\hbar^M$ 次の項 Γ_M の無限大を全て取り除くことが可能だとしよう. 前節で見たように, ジン・ジュスタン方程式 (ここでは $\chi_n^\ddagger = K_n + \delta\Psi/\delta\chi^n$ と置いて得られる) より, この場合量子論的有効作用の次数 $\hbar^N$ の無限大部分 $\Gamma_{N,\infty}$ は条件,

$$\Big(S_R, \Gamma_{N,\infty}\Big) = 0 \quad (17.3.9)$$

を満たすことが分かる. 場の変数 χ^n と反場の変数 $\chi_n^\ddagger$ は変数 χ^n と K_n に反正準変換で関係しており, この変換は全ての反括弧を保存するので, (17.3.9) の反括弧は χ^n と K_n の代わりに χ^n と $\chi_n^\ddagger$ を使って計算できる.

相殺項 S_N が満たす条件 (17.3.5) は $\Gamma_{N,\infty}$ が満たす条件 (17.3.9) と同じではない. しかし, (17.3.5) を満たす S_N^0 が与えられると, 他の解,

$$S_N = S_N^0 + S_N' \quad (17.3.10)$$

を見つけることができる. ここで $S_R + S_N'$ が $S_R + S_N^0$ と同様に S_R と同じ対称性条件を満たし, かつ (17.3.5) と矛盾しないように,

$$\Big(S_R, S_N'\Big) = 0 \quad (17.3.11)$$

を満たすことを除いて, S_N' は任意だ. よって量子論的有効作用の N 次項の無限大部分は,

$$\Gamma_{N,\infty} = S_{N,\infty}' + (F_{N,\infty}, S_R) + X_{N,\infty} \quad (17.3.12)$$

と書くことができる. ここで X_N は, S_N^0 の項と Γ で $M < N$ を満たす S_M と F_M を含む様々な項とから生じる項の他に, ループ・ダイアグラムから生じる項から成る. 例えば, $N = 2$ の場合には (17.3.8) より,

$$X_2 = S_2^0 + 2(F_1, S_1) + (F_1, (F_1, S_R)) + \ [S_R\text{のみを含む 2 ループ項}] \\ + [S_R,\ S_1,\ F_1 \text{ を含む 1 ループ項}]$$

が得られる. ここでの目的にとっては, X_N について知っておく必要があるのは, それが S_N' と F_N を含まず, またそれが S_R の線形の大域的対称性のもとで不変だということだけだ.

さて, $(S_R, S_R) = 0$ なので, 作用 $F \mapsto (S_R, F)$ は全ての F についてベキ零だ.

$$\Big(S_R, \Big(S_R, F\Big)\Big) = 0\,. \tag{17.3.13}$$

よって (17.3.9) と (17.3.11)-(17.3.13) とから,

$$\Big(S_R, X_{N,\infty}\Big) = 0 \tag{17.3.14}$$

となる. $X_{N,\infty}$ のなかの (S_R, Y) の形をした任意の項は, (17.3.12) で $F_{N,\infty}$ が Y に等しいように選ぶことで相殺できる. したがって, $X_{N,\infty}$ でそれ以外に相殺項 $S'_{N,\infty}$ によって打ち消される必要のある無限大項の空間は $(S_R, X) = 0$ を満たす汎関数 X から成る. ただしここで (S_R, Y) の形の項だけ異なる汎関数は同等と数える. 言い換えれば, 相殺項 S_N' によって打ち消される必要がある Γ_N の無限大は作用 $X \mapsto (S_R, X)$ のコホモロジーに属する.

相殺項 S_N' の可能な形は, 作用 S にどのような構造上の条件が課されようとも $S_R + S_N'$ がその条件を満たさなければならないという要求によって制限されている. よって, 射影 $X \mapsto (S_R, X)$ のコホモロジーがこの構造上の条件を満たす汎関数のみから成ることを示すことができれば, くりこみ可能性の証明を完成させることができる.

半単純ゲージ対称性を持つヤン・ミルズ場に結合する量子重力の場合には, 理論の対称性は構造上の条件 (17.3.1) によって満たされている. この場合, 定理[4]によれば, (ゴースト数ゼロで, 時空依存の関数よりむしろ局所的汎関数の空間上の) 射影 $X \mapsto (S_R, X)$ のコホモロジーは構造定数 $f^C{}_{AB}$ のゲージ変換 $\phi^r \to \phi^r + \epsilon^A f^r_A[\phi]$ のもとで不変な汎関数 $A[\phi]$ から成る.** この種の任意の N 次の無限大は同じ形の相殺項 S'_N で打ち消すことができる. よって, これらの理論は通常の次数勘定の意味ではくりこみ可能ではないが, 全ての無限大は元の裸の作用 $I[\phi]$ のパラメータの選択と場および反場の適切なくりこみによって取り除くことができるという意味でくりこみ可能だ.

他の理論では射影 $X \mapsto (S_R, X)$ のコホモロジーは余分な項を含む. これは必ずしも構造上の条件を弱めることを要求しない. なぜならコホモロジーの余分な項は実際の紫外発散に対応しない場合もあるからだ. 例えば, $U(1)$ 因子を持つゲージ理論ではコホモロジーは理論の様々な場に $U(1)$ ゲージ対称性がどう作用するかの再定義に対応する項[4]を含む. それはもし無限大なら, (17.3.1) の変換関数 $f^r_A[\phi]$ の規格化を任意にすることで, 構造上の条件をゆるめることを要求する. しかし, この無限大は様々な場との $U(1)$ 結合の比が (量子電磁理論で様々なレプトンの電荷の比と同様に) 輻射補正により影響を受けないという軟光子定理と同じ定理により禁止される. (10.4 節を見よ.) コホモロジーの余分な項が本当に紫外発散を含む場合には, あらゆる可能な紫外発散について相殺項が存在するためには S に課された構造上の条件を弱める必要がある. このことが常に可能か否かは知られていない. もし不可能なら, 取り除けない紫外発散のために捨てなければならない理論もあるかも知れない.

**厳密にいえば, これが正しいのは, S の定数係数がより大きな局所対称性の群のもとで S を不変にする特殊な値を取らないと要請したときだけだ. 例えば, これにより $S = 0$ の場合は排除される.

17.4 背景場ゲージ

次に, 一種のゲージ不変性を陽に保存し, したがって非常に便利な計算方法に移る. この方法は特に1ループ計算で便利だ. 古典的な外部ゲージ場, 物質場, ゴースト場, 反ゴースト場 $A_{\alpha\mu}(x)$, $\psi_\ell(x)$, $\omega_\alpha(x)$, $\omega^*_\alpha(x)$ の汎関数* としての有効相互作用 $\Gamma[A,\psi,\omega,\omega^*]$ を考える. ゴーストと反ゴーストは始状態や終状態には決して現れないが, ゴーストと反ゴーストの外線を持つダイアグラムの部分を取り扱うために, 背景ゲージ場と物質場だけでなく背景ゴースト場と反ゴースト場を考えている.

16.1 節で述べたように, $\Gamma[A,\psi,\omega,\omega^*]$ は, 作用の中の積分する量子場 $A',\psi',\omega',\omega'^*$ をずらした場 $A+A',\psi+\psi'$, $\omega+\omega'$, $\omega^*+\omega'^*$ で置き換えた理論で, プライムの付いていない場を固定してプライムの付いた場について経路積分をとって計算した真空・真空振幅の連結1粒子既約ダイアグラムの和だ. ゲージ固定関数 $f_\alpha(x)$ はほとんど好きなように自由に選んでよい. 以前の選び方 $f_\alpha=\partial_\mu A'^\mu_\alpha$ (あるいは $\partial_\mu[A'^\mu_\alpha+A^\mu_\alpha]$) の代わりにここでは,

$$f_\alpha=\partial_\mu A'^\mu_\alpha+C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}A'^\mu_\gamma \tag{17.4.1}$$

と選ぶことにする.[5] このように選ぶ理由は, 背景場 A^μ_α がゲージ場のように変換し, 量子場 A'^μ_α はゲージ群の随伴表現に属する通常の物質場のように,

$$\delta A^\mu_\alpha=\partial^\mu\epsilon_\alpha-C_{\alpha\beta\gamma}\,\epsilon_\beta\,A^\mu_\gamma\,, \tag{17.4.2}$$

$$\delta A'^\mu_\alpha=-C_{\alpha\beta\gamma}\,\epsilon_\beta\,A'^\mu_\gamma \tag{17.4.3}$$

と斉次の変換をする形式的な変換のもとで, ゲージ固定項 $f_\alpha f_\alpha$ が不

*ここでは元に戻ってゲージ固定汎関数 $B[f]$ をガウス型という特別の形 (15.7.4) に選び, 補助場 h_α を積分しているので, 変更されたゲージ固定項は単に $-f_\alpha f_\alpha/2\xi$ だ.

変となるようにするためだ. f_α の変換性を最も簡単に見るには, それを新しい種類の共変微分,

$$f_\alpha \equiv \bar{D}_\mu A'^{\mu}_{\alpha} \tag{17.4.4}$$

で書いてみればよい. ここで随伴表現の任意の場 ϕ_α について,

$$\bar{D}_\mu \phi_\alpha \equiv \partial_\mu \phi_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} \phi_\gamma \tag{17.4.5}$$

だ. 変換 (17.4.2), (17.4.3) のもとで関数 (17.4.1) は A'_α とちょうど同じく,

$$\delta f_\alpha = -C_{\alpha\beta\gamma}\, \epsilon_\beta f_\gamma \tag{17.4.6}$$

と変換するので, 変更されたラグランジアンの $f_\alpha f_\alpha$ の項は不変だ.

$$\delta(f_\alpha f_\alpha) = -2C_{\alpha\beta\gamma}\, f_\alpha\, \epsilon_\beta\, f_\gamma = 0\,. \tag{17.4.7}$$

また, 元のラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ は A と A' とに和 $A + A'$ を通じてのみ依存し, その和は変換の組み合わせ (17.4.2), (17.4.3) に対して通常のゲージ変換,

$$\delta(A^\mu_\alpha + A'^{\mu}_{\alpha}) = \partial^\mu \epsilon_\alpha - C_{\alpha\beta\gamma}\, \epsilon_\beta (A^\mu_\gamma + A'^{\mu}_{\gamma}) \tag{17.4.8}$$

を受ける. 背景および量子物質場を,

$$\delta\psi = i\, t_\alpha \epsilon_\alpha \psi\,, \tag{17.4.9}$$

$$\delta\psi' = i\, t_\alpha \epsilon_\alpha \psi' \tag{17.4.10}$$

と変換すると,

$$\delta(\psi + \psi') = i\, t_\alpha \epsilon_\alpha (\psi + \psi') \tag{17.4.11}$$

がまた得られる. 元のラグランジアン $\mathcal{L}$ は元のゲージ変換 (17.4.8), (17.4.11) のもとで不変で, $A + A'$ および $\psi + \psi'$ のみに依存するので,

それは新しい形式的な変換 (17.4.2), (17.4.3), (17.4.9), (17.4.10) のもとでも不変だ.

$\mathcal{L}$ を背景共変微分 $\bar{D}_\mu$ で書いてこの不変性をより明確にするのは有益だ. 一般に, 次のように書ける.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &-\tfrac{1}{4}\Big(\partial_\mu[A_{\alpha\nu}+A'_{\alpha\nu}]-\partial_\nu[A_{\alpha\mu}+A'_{\alpha\mu}]\\&\qquad+C_{\alpha\beta\gamma}[A_{\beta\mu}+A'_{\beta\mu}][A_{\gamma\nu}+A'_{\gamma\nu}]\Big)^2\\&+\mathcal{L}_M\Big(\psi+\psi',\ \partial_\mu(\psi+\psi')-i\,t_\alpha(A_{\alpha\mu}+A'_{\alpha\mu})(\psi+\psi')\Big)\\=&-\tfrac{1}{4}\Big(F_{\alpha\mu\nu}+\bar{D}_\mu A'_{\alpha\nu}-\bar{D}_\nu A'_{\alpha\mu}+C_{\alpha\beta\gamma}A'_{\beta\mu}A'_{\gamma\nu}\Big)^2\\&+\mathcal{L}_M\Big(\psi+\psi',\ \bar{D}_\mu(\psi+\psi')-i\,t_\alpha A'_{\alpha\mu}(\psi+\psi')\Big)\,.\end{aligned}\tag{17.4.12}$$

ここで, (17.4.5) と同様に,

$$\bar{D}_\mu A'_{\alpha\nu}\equiv\partial_\mu A'_{\alpha\nu}+C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}A'_{\gamma\nu}\,,\tag{17.4.13}$$

$$\bar{D}_\mu\psi\equiv\partial_\mu\psi-i\,t_\alpha A_{\alpha\mu}\psi\tag{17.4.14}$$

で, $F_{\alpha\mu\nu}$ は以下の背景場の強度だ.

$$F_{\alpha\mu\nu}\equiv\partial_\mu A_{\alpha\nu}-\partial_\nu A_{\alpha\mu}+C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}A_{\gamma\nu}\,.\tag{17.4.15}$$

($\mathcal{L}$ の第 1 項における 2 乗は明白な添字の縮約を意味する.) 明らかに $\mathcal{L}$ は新しい変換 (17.4.2), (17.4.3), (17.4.9), (17.4.10) のもとで不変だ. なぜなら $A_{\alpha\mu}$ は場の強度 $F_{\alpha\mu\nu}$ と「物質場」$A'_{\alpha\mu},\psi',\psi$ の背景共変微分 $\bar{D}_\mu$ とにしか含まれないからだ.

この新しい変換は真のゲージ変換と注意深く区別しなければならない. 後者の変換は, 今指定したとおりの古典背景場 A と ψ には何の影響も及ぼさず, $A+A'$ と $\psi+\psi'$ に通常のゲージ変換を引き起こす. よって,

$$\delta_{\mathrm{TRUE}}A^\mu_\alpha=0\,,\tag{17.4.16}$$

$$\delta_{\mathrm{TRUE}} A'^{\mu}_{\alpha} = \partial^{\mu}\epsilon_{\alpha} - C_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\beta}(A^{\mu}_{\gamma} + A'^{\mu}_{\gamma})$$
$$= \bar{D}_{\mu}\epsilon_{\alpha} - C_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\beta}A'^{\mu}_{\gamma} \qquad (17.4.17)$$

と

$$\delta_{\mathrm{TRUE}}\, \psi = 0\,, \qquad (17.4.18)$$

$$\delta_{\mathrm{TRUE}}\, \psi' = i\, t_{\alpha}\epsilon_{\alpha}(\psi + \psi') \qquad (17.4.19)$$

になる. もちろん, これの $A + A'$ と $\psi + \psi'$ とへの効果は形式的な変換 (17.4.2), (17.4.3), (17.4.9), (17.4.10) と同じなので, 元のラグランジアン $\mathcal{L}$ を不変に保つ. しかし, f_α を新しい (17.4.1) に選んだ場合には $f_\alpha f_\alpha$ の項は $A + A'$ だけに依存するわけではなく, (17.4.16) と (17.4.17) のもとで不変ではない. 代わりに,

$$\delta_{\mathrm{TRUE}}\, f_{\alpha} = \bar{D}_{\mu}(\bar{D}^{\,\mu}\epsilon_{\alpha} - C_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\beta}A'^{\mu}_{\gamma}) \qquad (17.4.20)$$

と変換する. ここで $\bar{D}_\mu$ は (17.4.5) で与えられる.

最後に, この新しいゲージでのゴースト・ラグランジアンを考察しよう. ゴーストの作用に現れる量 (15.7.3) は一般に $\delta_{\mathrm{TRUE}} f_\alpha$ の ϵ_α をゴースト場 $\omega_\alpha + \omega'_\alpha$ で置き換えるだけで以下のように得られる.

$$\Delta_{\alpha} = \bar{D}_{\mu}\Big[\bar{D}^{\mu}(\omega_{\alpha} + \omega'_{\alpha}) - C_{\alpha\beta\gamma}(\omega_{\beta} + \omega'_{\beta})A'^{\mu}_{\gamma}\Big]\,. \qquad (17.4.21)$$

よってゴースト・ラグランジアン (15.6.2) は,

$$\mathcal{L}_{\mathrm{GH}} = (\omega^{*}_{\alpha} + \omega'^{*}_{\alpha})\,\bar{D}_{\mu}\Big[\bar{D}^{\mu}(\omega_{\alpha} + \omega'_{\alpha}) - C_{\alpha\beta\gamma}(\omega_{\beta} + \omega'_{\beta})\,A'^{\mu}_{\gamma}\Big] \quad (17.4.22)$$

あるいは, 部分積分して,

$$\mathcal{L}_{\mathrm{GH}} = -\Big(\bar{D}_{\mu}(\omega^{*}_{\alpha} + \omega'^{*}_{\alpha})\Big)\Big(\bar{D}^{\mu}(\omega_{\alpha} + \omega'_{\alpha}) - C_{\alpha\beta\gamma}(\omega_{\beta} + \omega'_{\beta})A'^{\mu}_{\gamma}\Big) \qquad (17.4.23)$$

となる. これは組み合わせ変換 (17.4.2), (17.4.3) に ω および ω' についての,

$$\delta\omega_\alpha = -C_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_\beta\omega_\gamma \,, \tag{17.4.24}$$

$$\delta\omega'_\alpha = -C_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_\beta\omega'_\gamma \tag{17.4.25}$$

および, 同様に,

$$\delta\omega^*_\alpha = -C_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_\beta\omega^*_\gamma \,, \tag{17.4.26}$$

$$\delta\omega'^*_\alpha = -C_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_\beta\omega'^*_\gamma \tag{17.4.27}$$

という変換を補った変換のもとで明白に不変だ.

形式的な組み合わせ変換 (17.4.2), (17.4.3), (17.4.9), (17.4.10), (17.4.24)–(17.4.27) は変更された作用 (15.6.4) の完全なラグランジアン,

$$\mathcal{L}_{\rm MOD} = \mathcal{L} - \frac{1}{2\xi}\, f_\alpha f_\alpha + \mathcal{L}_{GH} \tag{17.4.28}$$

を不変に保つことが分かる. 単純な行列変換 (17.4.3), (17.4.10), (17.4.25), (17.4.27) のもとで不変と仮定した測度を用いて A', ψ', ω', ω'^* について積分するので, 有効作用 $\Gamma[A,\psi,\omega,\omega^*]$ は残りの変換 (17.4.2), (17.4.9), (17.4.24), (17.4.26) のもとで不変だ. 言い換えれば, この有効作用は元の作用 $I[A,\psi,\omega,\omega^*]$ と同じ意味でゲージ不変だ.

この形式的なゲージ不変性は有効作用に生じるうる無限大に強力な制約を課す. Γ の紫外発散は項の次元を [質量]^d としたとき $d \leq 4$ となる項の係数に現れるが, ここでこれらの項は背景ゲージ変換 (17.4.2), (17.4.9), (17.4.24), (17.4.26) のもとで不変だ. 例えば, 単純ゲージ群に基づくゲージ理論で, スピン 1/2 フェルミオンがこの群の既約表現に属する場合, 唯一のそのような項は,

$$\Gamma_\infty = \int d^4x\, \mathcal{L}_\infty \,, \tag{17.4.29}$$

$$\mathcal{L}_\infty = -\tfrac{1}{4}\ L_A\ F_{\alpha\mu\nu}F_\alpha^{\mu\nu} - L_\psi\bar{\psi}\gamma^\mu\bar{D}_\mu\psi$$
$$-m\,L_m\bar{\psi}\psi - L_\omega(\bar{D}_\mu\omega_\alpha^*)(\bar{D}^\mu\omega_\alpha) \qquad (17.4.30)$$

の形をしている. ここで $F_{\alpha\mu\nu}$, $\bar{D}_\mu\psi$, $\bar{D}_\mu\omega_\alpha$, $\bar{D}_\mu\omega_\alpha^*$ は背景場だけから構成される.**

$$F_{\alpha\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu} + C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}A_{\gamma\nu}\ , \qquad (17.4.31)$$

$$\bar{D}_\mu\psi \equiv \partial_\mu\psi - i\,t_\alpha A_{\alpha\mu}\psi\ , \qquad (17.4.32)$$

$$\bar{D}_\mu\omega_\alpha \equiv \partial_\mu\omega_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}\omega_\alpha\ , \qquad (17.4.33)$$

$$\bar{D}_\mu\omega_\alpha^* \equiv \partial_\mu\omega_\alpha^* + C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}\omega_\alpha^*\ . \qquad (17.4.34)$$

次元解析から定数 L_A, L_ψ, L_m, L_ω は対数発散すると期待される.

これらの無限大を取り扱うために, ラグランジアン (17.4.12) は, $\mathcal{L}_{\rm MOD}$ で量子場 $A', \psi', \omega', \omega'^*$ を含む全ての項を落として得られる純粋に古典的な部分,

$$\mathcal{L}_{\rm CLASS} = -\tfrac{1}{4}\ F_{\alpha\mu\nu}F_\alpha^{\mu\nu} - \bar{\psi}(\gamma^\mu\bar{D}_\mu + m)\psi - (\bar{D}_\mu\omega_\alpha^*)(\bar{D}^\mu\omega_\alpha) \quad (17.4.35)$$

を含むことに留意する. くりこまれた場を,

$$A_{\alpha\mu}^R \equiv \sqrt{1+L_A}\,A_{\alpha\mu}\ , \qquad (17.4.36)$$

$$\psi_\ell^R \equiv \sqrt{1+L_\psi}\,\psi_\ell\ , \qquad (17.4.37)$$

$$\omega_\alpha^R \equiv \sqrt{1+L_\omega}\,\omega_\alpha\ , \qquad (17.4.38)$$

$$\omega_\alpha^{R*} \equiv \sqrt{1+L_\omega}\,\omega_\alpha^* \qquad (17.4.39)$$

と定義すると, 項 (17.4.30) と (17.4.35) の和は,

$$\mathcal{L}_{\rm CLASS} + \mathcal{L}_\infty = -\tfrac{1}{4}\ F_{\alpha\mu\nu}^R\,F_\alpha^{R\mu\nu} - \bar{\psi}^{\,R}\gamma^\mu D_\mu^R\psi^R$$

**単純群の条件は, A と ω についてそれぞれ $F_{\alpha\mu\nu}F_\alpha^{\mu\nu}$ と $\bar{D}_\mu\omega_\alpha^*\bar{D}^\mu\omega_\alpha$ に比例する単一の運動項の存在を保証するが, 一方 ψ の既約変換性は, ψ について単一の運動項と単一の質量項の存在を保証する. より一般的な可能性を取り扱うのは, 表記法を若干複雑にすれば容易であろう. またここではゴースト数の保存を暗黙のうちに使っている.

$$-m^R\bar{\psi}^R\psi^R-(D^R_\mu\omega^{*R}_\alpha)(D^{\mu R}\omega^R_\alpha) \quad (17.4.40)$$

の形になる. ここで, m^R はくりこまれた質量,

$$m^R\equiv m(1+L_m)\Big/(1+L_\psi) \quad (17.4.41)$$

で,

$$F^R_{\alpha\mu\nu}\equiv\partial_\mu A^R_{\alpha\nu}-\partial_\nu A^R_{\alpha\mu}+C^R_{\alpha\beta\gamma}A^R_{\beta\mu}\,A^R_{\gamma\nu}\,, \quad (17.4.42)$$

$$D^R_\mu\psi^R\equiv\partial_\mu\psi^R-i\,t^R_\alpha\,A^R_{\alpha\mu}\psi^R\,, \quad (17.4.43)$$

$$D^R_\mu\omega^R_\alpha\equiv\partial_\mu\omega^R_\alpha+C^R_{\alpha\beta\gamma}\,A^R_{\beta\mu}\,\omega^R_\gamma\,, \quad (17.4.44)$$

$$D^R_\mu\omega^{*R}_\alpha\equiv\partial_\mu\omega^{*R}_\alpha+C^R_{\alpha\beta\gamma}\,A^R_{\beta\mu}\,\omega^{*R}_\gamma \quad (17.4.45)$$

だ. くりこまれた構造定数と群の生成子はここではちょうど次のとおりだ.

$$C^R_{\alpha\beta\gamma}\equiv(1+L_A)^{-1/2}C_{\alpha\beta\gamma}\,, \quad (17.4.46)$$

$$t^R_\alpha\equiv(1+L_A)^{-1/2}\,t_\alpha\,. \quad (17.4.47)$$

リー代数は単純と仮定したので, 構造定数 $C_{\alpha\beta\gamma}$ と 群の生成子 t_α は単一の共通因子であるくりこまれていないゲージ結合定数 g を除いて群の構造により決まっている. こうして (17.4.46) と (17.4.47) より, C^R と t^R のゲージ結合定数 g^R 因子は,

$$g^R=g(1+L_A)^{-1/2} \quad (17.4.48)$$

とくりこまれることが容易に分かる.

この結果より背景場ゲージの特別な価値が明らかになる. 一般のゲージではゲージ場とゲージ結合定数との独立なくりこみ因子が登場し, それらを分類するためには二つの別々な振幅 (例えば, 真空偏極とゲージ場 3 頂点関数) を計算しなければならない. 背景場ゲージで

は, 背景場ゲージ不変性から, 場の強度が有効作用の無限大項に元の形 (17.4.31) で含まれるという要求によって, これら二つのくりこみは結びついており, よって一つのゲージ場振幅を調べるだけで, 荷電くりこみ因子が計算できる.

17.5 背景場ゲージでの 1 ループ計算

演習問題として, 一般の非可換ゲージ理論のゲージ結合定数の 1 ループくりこみ因子を計算する. 次章で見るように, これは高エネルギーでの物理過程のいわゆる「くりこみ群」計算の本質的な入力を与える. すなわちここで得られる結果は次章で非可換ゲージ理論の漸近自由性を示すのに使われる.

ここで採用する方法は若干新奇だ. 通常は, 時空に依存する背景ゲージ場での有効作用を考え, この場について 2 次の項を計算して因子 $(q_\mu A_{\alpha\nu} - q_\nu A_{\alpha\mu})^2$ (ここで q はゲージ場の 4 元運動量) を抜き出し, この因子の係数の中で $q = 0$ と置くことで対数発散を分離する. ここではその代わりに, ゲージ場を最初から時空に依存しないとする, はるかに簡単な方法を採る. この場合有効作用のゲージ場について 2 次または 3 次の項はもちろんゼロだが, 紫外発散する 4 次の項がゼロでない. その項を使うと結合定数のくりこみ因子 $(1 + L_A)^{-1/2}$ が計算できる. このようにして 1 ループ計算は簡単な行列代数の問題に帰する. このやり方は背景場ゲージでのみうまく行く. 他のゲージでは, 有効作用の背景ゲージ場について 4 次および 2 次の部分に独立な対数発散が存在する.

この動機を念頭に置いて, $A_{\alpha\mu}$ が定数で $\psi = \omega = \omega^* = 0$ という背景場での 1 ループ有効作用の計算に移る. 背景場をそのように採る

と, 変更されたラグランジアン全体は以下のとおりだ.*

$$\mathcal{L}_{\rm MOD} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_{GH}\ , \tag{17.5.1}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &-\tfrac{1}{4}\left(F_{\alpha\mu\nu} + \bar{D}_\mu A'_{\alpha\nu} - \bar{D}_\nu A'_{\alpha\mu} + C_{\alpha\beta\gamma}A'_{\beta\mu}A'_{\gamma\nu}\right)^2 \\ &- \bar{\psi}'(\bar{\not{D}} - i\,t_\alpha \not{A}'_\alpha + m)\psi'\ ,\end{aligned} \tag{17.5.2}$$

$$\mathcal{L}_f \equiv -\frac{1}{2\xi}f_\alpha f_\alpha = -\frac{1}{2\xi}(\bar{D}_\mu A'^{\mu}_{\alpha})^2\ , \tag{17.5.3}$$

$$\mathcal{L}_{GH} = -(\bar{D}_\mu \omega'^{*}_{\alpha})(\bar{D}^\mu \omega'_\alpha - C_{\alpha\beta\gamma}\omega'_\beta A'^{\mu}_{\gamma})\ . \tag{17.5.4}$$

真空·真空振幅の 1 ループ·ダイアグラムは積分する量子場 $A', \psi', \omega', \omega'^*$ について 2 次の作用項の部分から計算される. そのような 2 次項のみを残すと,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\rm QUAD} = &-\frac{1}{4}(\bar{D}_\mu A'_{\alpha\nu} - \bar{D}_\nu A'_{\alpha\mu})^2 - \frac{1}{2}F^{\mu\nu}_{\alpha}C_{\alpha\beta\gamma}A'_{\beta\mu}A'_{\gamma\nu} \\ &-\bar{\psi}'(\bar{\not{D}} + m)\psi' - \frac{1}{2\xi}(\bar{D}_\mu A'^{\mu}_{\alpha})^2 - (\bar{D}_\mu \omega'^{*}_{\alpha})(\bar{D}^\mu \omega'_\alpha)\end{aligned} \tag{17.5.5}$$

が得られる. 対応する作用は次のように一般的な 2 次形式にできる.

$$\begin{aligned}I_{\rm QUAD} &\equiv \int d^4x\,\mathcal{L}_{\rm QUAD} \\ &= -\tfrac{1}{2}\int d^4x\,d^4y\,A'^{\mu}_{\alpha}(x)A'^{\nu}_{\beta}(y)\,\mathcal{D}^A_{x\alpha\mu,y\beta\nu} \\ &\quad -\int d^4x\,d^4y\,\bar{\psi}'_k(x)\psi'_\ell(y)\,\mathcal{D}^\psi_{xk,y\ell} \\ &\quad -\int d^4x\,d^4y\,\omega^{*'}_{\alpha}(x)\omega'_\beta(y)\,\mathcal{D}^\omega_{x\alpha,y\beta}\ .\end{aligned} \tag{17.5.6}$$

ここで,

$\mathcal{D}^A_{x\alpha\mu,y\beta\nu}$

*(17.4.12), (17.4.4), (17.4.23) を見よ. ここでは物質場はスピン $\frac{1}{2}$ の多重項を作る場合に特化している. $\mathcal{L}$ と $\mathcal{L}_f$ で 2 乗は明白な添字の縮約を含む.

$$\equiv \eta_{\mu\nu}\Big(-\delta_{\gamma\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\lambda}+C_{\gamma\delta\alpha}A^\lambda_\delta(x)\Big)\Big(-\delta_{\gamma\beta}\frac{\partial}{\partial y^\lambda}+C_{\gamma\epsilon\beta}A_{\epsilon\lambda}(y)\Big)\delta^4(x-y)$$
$$-\Big(-\delta_{\gamma\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\nu}+C_{\gamma\delta\alpha}A_{\delta\nu}(x)\Big)\Big(-\delta_{\gamma\beta}\frac{\partial}{\partial y^\mu}+C_{\gamma\epsilon\beta}A_{\epsilon\mu}(y)\Big)\delta^4(x-y)$$
$$+F_{\gamma\mu\nu}(x)C_{\gamma\alpha\beta}\delta^4(x-y)$$
$$+\frac{1}{\xi}\Big(-\delta_{\gamma\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\mu}+C_{\gamma\delta\alpha}A_{\delta\mu}(x)\Big)\Big(-\delta_{\gamma\beta}\frac{\partial}{\partial y^\nu}+C_{\gamma\epsilon\beta}A_{\epsilon\nu}(y)\Big)\delta^4(x-y) \tag{17.5.7}$$

$$\mathcal{D}^\psi_{xk,y\ell}\equiv\left(-\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial y^\mu}-it_\alpha A\!\!\!/_\alpha(y)+m\right)_{k\ell}\delta^4(x-y)\,, \tag{17.5.8}$$

$$\mathcal{D}^\omega_{x\alpha,y\beta}=\left(-\delta_{\gamma\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}+C_{\gamma\delta\alpha}A_{\delta\lambda}(x)\right)$$
$$\times\left(-\delta_{\gamma\beta}\frac{\partial}{\partial y_\lambda}+C_{\gamma\epsilon\beta}A^\lambda_\epsilon(y)\right)\delta^4(x-y) \tag{17.5.9}$$

と置いた. ($\partial/\partial x$ と $\partial/\partial y$ の前の負符号は部分積分すると消える.)

有効作用への 1 ループの寄与は (16.2 節のように),

$$\exp\left(i\Gamma^{1\text{ loop}}[A]\right)\propto\int_{1PI}(\prod dA')(\prod d\psi')(\prod d\bar\psi')(\prod d\omega')(\prod d\omega^{*\prime})$$
$$\times\ \exp\left(i\,I_{\text{QUAD}}[A',\psi',\bar\psi',\omega',\omega'^*;A]\right)$$
$$\propto(\text{Det}\mathcal{D}^A)^{-1/2}(\text{Det}\mathcal{D}^\psi)^{+1}(\text{Det}\mathcal{D}^\omega)^{+1} \tag{17.5.10}$$

で与えられる. (指数 $-1/2$ と $+1$ は A' が実ボゾン場で ψ', $\bar\psi'$, ω', ω'^* が別々のフェルミオン場であることから来る.) そのような行列式の計算は一般には容易な作業ではない. しかし, 定数の外場の場合にはずっと簡単になって, $\mathcal{D}$ は運動量空間に移ることで対角化できる.

よってここでは定数背景場 $A_{\alpha\mu}$ の場合を考えよう. 非可換ゲージ理論では, そのような定数場は, ゲージ変換で消し去ることはできない. これは,

$$F_{\alpha\mu\nu}=C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}A_{\gamma\nu}\,, \tag{17.5.11}$$

$$D_\lambda F_{\delta\mu\nu}=C_{\delta\epsilon\alpha}C_{\alpha\beta\gamma}A_{\epsilon\lambda}A_{\beta\mu}A_{\gamma\nu} \tag{17.5.12}$$

というように様々なゲージ共変な場がゼロでない値を持つことに示されている. ローレンツ不変性とゲージ不変性から $\Gamma[A]$ の与えられた次元を持つ部分を $F_{\alpha\mu\nu}$, $D_\lambda F_{\alpha\mu\nu}$ 等の有限個の局所関数の積分でどう表せばよいかが分かる. この表現の各項の係数は, 定数背景場 $A_{\alpha\mu}$ の場合に $\Gamma[A]$ へのこれらの項の寄与を摂動展開の結果と比較することで推定できる.

「行列」$\mathcal{D}^A$, $\mathcal{D}^\psi$, $\mathcal{D}^\omega$ をそれぞれ通常の規格化されたフーリエ変換,

$$\mathcal{D}_{q\cdots,\,p\cdots} = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^2}\, e^{-iq\cdot x} \int \frac{d^4y}{(2\pi)^2}\, e^{ip\cdot y}\, \mathcal{D}_{x\cdots,y\cdots} \tag{17.5.13}$$

により運動量基底に変換する. A が定数のとき, これは,

$$\mathcal{D}_{q\cdots,p\cdots} = \delta^4(p-q)\,\mathcal{M}_{\cdots,\cdots}(q) \tag{17.5.14}$$

を与える. ここで「$\cdots$」は離散的な添字を表し, $\mathcal{M}$ は q に依存する有限の行列,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^A_{\alpha\mu,\beta\nu}(q) = {} & \eta_{\mu\nu}(-iq_\lambda\delta_{\gamma\alpha} + A_{\delta\lambda}C_{\gamma\delta\alpha})(iq^\lambda\delta_{\gamma\beta} + A_\epsilon{}^\lambda C_{\gamma\epsilon\beta}) \\ & -(-iq_\nu\delta_{\gamma\alpha} + A_{\delta\nu}C_{\gamma\delta\alpha})\,(iq_\mu\delta_{\gamma\beta} + A_{\epsilon\mu}C_{\gamma\epsilon\beta}) \\ & +F_{\gamma\mu\nu}C_{\gamma\alpha\beta} \\ & +(-iq_\mu\delta_{\gamma\alpha} + A_{\delta\mu}C_{\gamma\delta\alpha})\,(iq_\nu\delta_{\gamma\beta} + A_{\epsilon\nu}C_{\gamma\epsilon\beta})/\xi \\ & +[\epsilon\ \text{項}]\,, \end{aligned} \tag{17.5.15}$$

$$\mathcal{M}^\psi_{k\ell}(q) = (i\not{q} - it_\alpha\not{A}_\alpha + m)_{k\ell} + [\epsilon\ \text{項}]\,, \tag{17.5.16}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^\omega_{\alpha\beta}(q) = {} & (-iq_\lambda\delta_{\gamma\alpha} + A_{\delta\lambda}C_{\gamma\delta\alpha})\,(iq^\lambda\delta_{\gamma\beta} + A_\epsilon{}^\lambda C_{\gamma\epsilon\beta}) \\ & +[\epsilon\ \text{項}] \end{aligned} \tag{17.5.17}$$

を表す. ここで $F_{\gamma\mu\nu}$ は (17.5.11) で与えられる. すると (17.5.10) より,

$$\begin{aligned} i\,\Gamma^{(1\ \mathrm{loop})}[A] &= -\tfrac{1}{2}\ \ln \mathrm{Det}\mathcal{D}^A + \ln \mathrm{Det}\mathcal{D}^\psi + \ln \mathrm{Det}\mathcal{D}^\omega \\ &= -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\ln \mathcal{D}^A + \mathrm{Tr}\ln \mathcal{D}^\psi + \mathrm{Tr}\ln \mathcal{D}^\omega \end{aligned}$$

$$= \delta^4(p-p)\int d^4q\Big[-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}\ln\mathcal{M}^A(q)+\mathrm{tr}\ln\mathcal{M}^\psi(q) \\ +\mathrm{tr}\ln\mathcal{M}^\omega(q)\Big] \tag{17.5.18}$$

が得られる. (17.5.18) の最終行 (およびこの節のこれ以降) でトレースを 'Tr' ではなく 'tr' と表す. これは, これらのトレースが積分演算子ではなく有限行列の通常のトレースであることを明示するためだ.

ここでは有効作用の FF 項にかかる無限大の因子 L_A の計算が目的なので, (17.5.18) の背景場 A について 4 次の項を抜き出そう. このためには, 各 $\mathcal{M}$ を A の因子を $n=0,1,$ または 2 個含む項 $\mathcal{M}_n$ に分割するのが便利だ.

$$\mathcal{M}=\mathcal{M}_0+\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2\,. \tag{17.5.19}$$

初等的代数により, (17.5.18) で $A_{\alpha\mu}$ の 4 次の項は,

$$[\mathrm{tr}\ln\mathcal{M}]_{A^4}=\mathrm{tr}\Big\{-\tfrac{1}{2}\,[\mathcal{M}_0^{-1}\mathcal{M}_2]^2 \\ +[\mathcal{M}_0^{-1}\mathcal{M}_1]^2\mathcal{M}_0^{-1}\mathcal{M}_2-\tfrac{1}{4}\,[\mathcal{M}_0^{-1}\mathcal{M}_1]^4\Big\} \tag{17.5.20}$$

だと分かる. (これを見るには, (17.5.19) で因子 ϵ と ϵ^2 を $\mathcal{M}_1$ と $\mathcal{M}_2$ にかかるように挿入し, tr ln $\mathcal{M}$ を ϵ で 4 回微分して, 4! で割って $\epsilon=0$ と置く.) ここで $\mathcal{M}_0^{-1}$ 因子はちょうど普通のプロパゲータで, $\xi=1$ の場合,

$$[\mathcal{M}_0^A(q)]^{-1}_{\alpha\mu,\beta\nu}=\delta_{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}(q^2-i\epsilon)^{-1}\,, \tag{17.5.21}$$

$$[\mathcal{M}_0^\psi(q)]^{-1}_{k\ell}=[i\not{q}+m]^{-1}_{k\ell}\,, \tag{17.5.22}$$

$$[\mathcal{M}_0^\omega(q)]^{-1}_{\alpha,\beta}=\delta_{\alpha\beta}(q^2-i\epsilon)^{-1} \tag{17.5.23}$$

だ. 実際, (17.5.20) の 3 項は 図 17.1 に示した三つのファインマン・ダイアグラムに対応する. この計算法を使うと符号や組み合わせの因子を考えなくても済ますことができる.

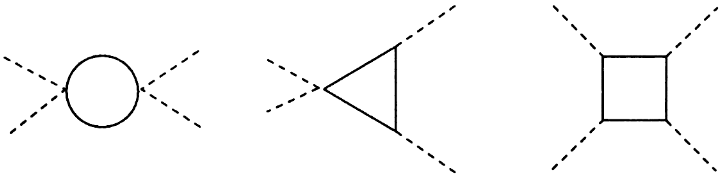


図 17.1: 量子論的有効作用で定数の背景ゲージ場 A^μ_α について 4 次の項の 1 ループ・ファインマン・ダイアグラム. ここで実線はゲージ場, ゴースト場, 物質場の内線を表し, 破線は A^μ_α の因子を示す. これらの三つのダイアグラムは (17.5.20) の 3 項に対応する.

A のループについては, $\xi = 1$ の場合 (17.5.15) より以下のとおりだ.

$$[\mathcal{M}_1^A(q)]_{\alpha\mu,\beta\nu} = -2\eta_{\mu\nu} q^\lambda [\mathcal{A}_\lambda]_{\alpha\beta} ,$$
$$[\mathcal{M}_2^A(q)]_{\alpha\mu,\beta\nu} = + \left[\eta_{\mu\nu}\mathcal{A}_\lambda\mathcal{A}^\lambda - \mathcal{A}_\nu\mathcal{A}_\mu - \mathcal{A}_\mu\mathcal{A}_\nu\right]_{\alpha\beta} + F_{\gamma\mu\nu}C_{\gamma\alpha\beta} .$$

ここで $\mathcal{A}_\lambda$ は行列

$$[\mathcal{A}_\lambda]_{\alpha\beta} \equiv -i\, C_{\alpha\beta\gamma}A_{\gamma\lambda}$$

で,

$$\begin{aligned}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_\rho]_{\alpha\beta} &= -C_{\alpha\delta\gamma}C_{\delta\beta\epsilon}\left(A_{\gamma\lambda}A_{\epsilon\rho} - A_{\gamma\rho}A_{\epsilon\lambda}\right) \\ &= -\left(C_{\alpha\delta\gamma}C_{\delta\beta\epsilon} + C_{\alpha\delta\epsilon}C_{\delta\beta\gamma}\right)A_{\gamma\lambda}A_{\epsilon\rho} \\ &= +C_{\alpha\delta\beta}C_{\delta\epsilon\gamma}A_{\gamma\lambda}A_{\epsilon\rho} = C_{\alpha\delta\beta}F_{\delta\rho\lambda}\end{aligned}$$

となる. 積分は次の構造を持つ.

$$\int d^4q\, q^\mu q^\nu f(q^2) = \tfrac{1}{4}\,\eta^{\mu\nu}\int d^4q\; q^2 f(q^2) ,$$

$$\begin{aligned}\int d^4q\, q^\mu q^\nu q^\rho q^\sigma f(q^2) = \tfrac{1}{24}&[\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} + \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}] \\ &\times \int d^4q\; (q^2)^2 f(q^2) .\end{aligned}$$

すると $\xi=1$ の場合には,

$$\int d^4q\ \mathrm{tr}\left\{\left[\mathcal{M}_0^A(q)^{-1}\mathcal{M}_2^A(q)\right]^2\right\}$$
$$= 4\mathcal{I}\ \mathrm{tr}[\mathcal{A}^\lambda\mathcal{A}_\lambda\mathcal{A}^\eta\mathcal{A}_\eta] + 4\mathcal{I}\,C_{\gamma\alpha\beta}C_{\delta\alpha\beta}F_{\gamma\mu\nu}F_\delta^{\mu\nu}\ ,$$

$$\int d^4q\ \mathrm{tr}\left\{\left[\mathcal{M}_0^A(q)^{-1}\mathcal{M}_1^A(q)\right]^2\mathcal{M}_0^A(q)^{-1}\mathcal{M}_2^A(q)\right\}$$
$$= 4\mathcal{I}\ \mathrm{tr}[\mathcal{A}^\lambda\mathcal{A}_\lambda\mathcal{A}^\eta\mathcal{A}_\eta]\ ,$$

$$\int d^4q\ \mathrm{tr}\left\{\left[\mathcal{M}_0^A(q)^{-1}\mathcal{M}_1^A(q)\right]^4\right\}$$
$$= \tfrac{8}{3}\mathcal{I}\,\mathrm{tr}\Big[2\mathcal{A}^\lambda\mathcal{A}_\lambda\mathcal{A}^\eta\mathcal{A}_\eta + \mathcal{A}^\lambda\mathcal{A}^\eta\mathcal{A}_\lambda\mathcal{A}_\eta\Big]$$

となることが分かる. ここで $\mathcal{I}$ は発散積分,

$$\mathcal{I} \equiv \int d^4q\,[q^2 - i\epsilon]^{-2} \tag{17.5.24}$$

でその意味は以下で議論する. これを (17.5.20) に代入して,

$$\int d^4q\Big[\mathrm{tr}\ln\,\mathcal{M}^A(q)\Big]_{A^4} = \tfrac{2}{3}\ \mathcal{I}\,\mathrm{tr}\Big[\mathcal{A}^\lambda\mathcal{A}_\lambda\mathcal{A}^\eta\mathcal{A}_\eta - \mathcal{A}^\lambda\mathcal{A}^\eta\mathcal{A}_\lambda\mathcal{A}_\eta\Big]$$
$$-2\,\mathcal{I}\,C_{\gamma\alpha\beta}C_{\delta\alpha\beta}\,F_{\gamma\mu\nu}\,F_\delta^{\mu\nu}$$

が得られる. 両項は実際には同じ形をしており, 合わせると,

$$\int d^4q\Big[\mathrm{tr}\ln\,\mathcal{M}^A(q)\Big]_{A^4} = -\tfrac{5}{3}\ \mathcal{I}\,C_{\gamma\alpha\beta}C_{\delta\alpha\beta}F_{\gamma\mu\nu}F_\delta^{\mu\nu} \tag{17.5.25}$$

が得られる.

次にゴースト・ループに移ると, (17.5.17) から,

$$[\mathcal{M}_1^\omega(q)]_{\alpha\beta} = -2[\mathcal{A}^\lambda]_{\alpha\beta}\,q_\lambda \tag{17.5.26}$$

$$[\mathcal{M}_2^\omega(q)]_{\alpha\beta} = [\mathcal{A}^\lambda\mathcal{A}_\lambda]_{\alpha\beta} \tag{17.5.27}$$

となる. すると,

$$\int d^4q\,\mathrm{tr}\left\{\left[\mathcal{M}_0^\omega(q)^{-1}\mathcal{M}_2^\omega(q)\right]^2\right\}=\mathcal{I}\,\mathrm{tr}[\mathcal{A}^\lambda\mathcal{A}_\lambda\mathcal{A}^\eta\mathcal{A}_\eta]\,,$$

$$\int d^4q\,\mathrm{tr}\left\{\left[\mathcal{M}_0^\omega(q)^{-1}\mathcal{M}_1^\omega(q)\right]^2\mathcal{M}_0^\omega(q)^{-1}\mathcal{M}_2^\omega(q)\right\}$$
$$=\mathcal{I}\,\mathrm{tr}[\mathcal{A}^\lambda\mathcal{A}_\lambda\mathcal{A}^\eta\mathcal{A}_\eta]\,,$$

$$\int d^4q\,\mathrm{tr}\left\{\left[\mathcal{M}_0^\omega(q)^{-1}\mathcal{M}_1^\omega(q)\right]^4\right\}$$
$$=\tfrac{2}{3}\mathcal{I}\,\mathrm{tr}[2\mathcal{A}^\lambda\mathcal{A}_\lambda\mathcal{A}^\eta\mathcal{A}_\eta+\mathcal{A}^\lambda\mathcal{A}^\eta\mathcal{A}_\lambda\mathcal{A}_\eta]$$

が得られる. よってゴースト・ループについての (17.5.20) の積分は,

$$\int d^4q\,[\mathrm{Tr}\ln\mathcal{M}^\omega(q)]_{A^4}=\tfrac{1}{6}\,\mathcal{I}\,\mathrm{Tr}[\mathcal{A}^\lambda\mathcal{A}_\lambda\mathcal{A}^\eta\mathcal{A}_\eta-\mathcal{A}^\lambda\mathcal{A}^\eta\mathcal{A}_\lambda\mathcal{A}_\eta]$$
$$=\tfrac{1}{12}\,\mathcal{I}C_{\gamma\alpha\beta}C_{\delta\alpha\beta}F_{\gamma\mu\nu}F_\delta^{\mu\nu}\qquad(17.5.28)$$

となる.

最後に, 物質ループの頂点は,

$$[\mathcal{M}_1^\psi(q)]_{k\ell}=-i\,(t_\alpha A\!\!\!/_\alpha)_{k\ell}\,,\qquad[\mathcal{M}_2^\psi(q)]_{k\ell}=0$$

なので, (17.5.20) には,

$$\int d^4q\,[\mathrm{Tr}\ln\mathcal{M}^\psi(q)]_{A^4}=-\tfrac{1}{4}\int d^4q\,\mathrm{Tr}\left\{\left[(i\not{q}+m)^{-1}t_\alpha A\!\!\!/_\alpha\right]^4\right\}$$

の 1 項があるだけだ. ここで興味があるのはこの積分の紫外発散部分だけなので, 質量 (大きな q^ν に対しては無視できる) を落として,

$$\int d^4q\,[\mathrm{Tr}\ln\mathcal{M}^\psi(q)]_{A^4}$$
$$=-\tfrac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\{t_\alpha t_\beta t_\gamma t_\delta\}\,A_{\alpha\mu}A_{\beta\nu}A_{\gamma\rho}A_{\delta\sigma}$$
$$\times\int d^4q\frac{\mathrm{Tr}\{\not{q}\gamma^\mu\not{q}\gamma^\nu\not{q}\gamma^\rho\not{q}\gamma^\sigma\}}{(q^2-i\epsilon)^4}$$

$$= -\frac{\mathcal{I}}{96}\,\mathrm{Tr}\{t_\alpha t_\beta t_\gamma t_\delta\}A_{\alpha\mu}A_{\beta\nu}A_{\gamma\rho}A_{\delta\sigma}$$
$$\times\,\mathrm{Tr}\Big\{2\gamma_\lambda\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma_\eta\gamma^\rho\gamma^\eta\gamma^\sigma + \gamma_\lambda\gamma^\mu\gamma_\eta\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\rho\gamma^\eta\gamma^\sigma\Big\}\,, \tag{17.5.29}$$

と書くことができる. ここで $\mathcal{I}$ は (17.5.24) と同じ発散積分だ. ディラック行列のトレースを計算するには, これらの行列の反交換関係を使って,

$$\mathrm{Tr}\Big\{2\gamma_\lambda\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma_\eta\gamma^\rho\gamma^\eta\gamma^\sigma + \gamma_\lambda\gamma^\mu\gamma_\eta\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\rho\gamma^\eta\gamma^\sigma\Big\}$$
$$= 8\mathrm{Tr}\{\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\} - 4\mathrm{Tr}\{\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma\} - 4\mathrm{Tr}\{\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\sigma\}$$
$$= -64\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + 32\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} + 32\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}$$

と書く. すると (17.5.29) より,

$$\int d^4q\Big[\mathrm{Tr}\ln\mathcal{M}^\psi(q)\Big]_{A^4} = \tfrac{1}{3}\,\mathcal{I}\,\mathrm{Tr}\Big\{[t_\alpha,t_\beta][t_\gamma,t_\delta]\Big\}A_{\alpha\mu}A_{\beta\nu}A^\mu_\gamma A^\nu_\delta$$
$$= -\tfrac{1}{3}\,\mathcal{I}F_{\gamma\mu\nu}F_\delta^{\mu\nu}\mathrm{Tr}\{t_\gamma t_\delta\} \tag{17.5.30}$$

が得られる.

(17.5.18) で (17.5.25), (17.5.28), (17.5.30) を使うと最終的に,

$$\Gamma_{A^4}^{(1\ \mathrm{loop})} = \frac{-i\mathcal{I}}{(2\pi)^4}\int d^4x\,F_{\gamma\mu\nu}F_\delta^{\mu\nu}$$
$$\times\left[\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{12}\right)C_{\gamma\alpha\beta}C_{\delta\alpha\beta} - \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\{t_\gamma t_\delta\}\right] \tag{17.5.31}$$

が得られる. ここで, (17.5.14) の運動量空間のデルタ関数を,

$$\delta^4(p-p) = (2\pi)^{-4}\int d^4x\,1 \tag{17.5.32}$$

と表した. 結果が, 背景ゲージ不変性から要求されるとおり, 場の強度 (17.5.11) を通じてのみ $A_{\alpha\mu}$ に依存していることは重要なことだ.

ここで仮定したゲージ群の単純性と物質場の既約性を (この節では初めて) 使おう. この場合,

$$C_{\gamma\alpha\beta}C_{\delta\alpha\beta} = g^2 C_1\,\delta_{\gamma\delta}\ , \tag{17.5.33}$$

$$\mathrm{Tr}\{t_\gamma t_\delta\} = g^2 C_2 \delta_{\gamma\delta} \tag{17.5.34}$$

となる. ここで g は $C_{\gamma\alpha\beta}$ と t_γ に因子として現れる共通のゲージ結合定数で, C_1 と C_2 はゲージ群と, この群の物質場の多重項によって決まる表現とを特徴付ける数値定数だ. 例えば, 元々のヤン・ミルズ理論ではゲージ場は $SU(2)$ (同じことだが $SO(3)$) で構造定数は,

$$C_{\gamma\alpha\beta} = g\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$$

だ. ここで, α, β, γ は 1, 2, 3 の値を動く. (17.5.33) と比較して, この理論では,

$$C_1 = 2$$

となることが分かる. またこの理論では物質場は 2 重項を作り, t_α は $g/2$ と通常のパウリ行列 σ_α との積なので,

$$C_2 = 1/2$$

となる. もう少し一般的に, 群が $SU(N)$ で n_f 個の基本表現のフェルミオンを含む場合, 生成子の規格化を通常どおりとると,**

$$C_1 = N\ , \qquad C_2 = n_f/2 \tag{17.5.35}$$

となる. 一般の場合に戻ると, (17.5.33) と (17.5.34) から,

$$\Gamma^{(1\ \mathrm{loop})}_{A^4} = \frac{-ig^2\mathcal{I}}{(2\pi)^4}\int d^4x F_{\gamma\mu\nu}F^{\mu\nu}_{\gamma}\left[\frac{11}{12}C_1 - \frac{1}{3}C_2\right] \tag{17.5.36}$$

** $SU(3)$ の場合は t_α は $g/2$ と 19.7 節で使ったゲルマン行列 λ_α との積にとり, $C_{\alpha\beta\gamma} = (g/2)f_{\alpha\beta\gamma}$ となる.

が得られる. すなわち, (17.4.30) の無限大の定数 L_A は,

$$L_A = \frac{4ig^2\mathcal{I}}{(2\pi)^4}\left(\frac{11}{12}C_1 - \frac{1}{3}C_2\right) \tag{17.5.37}$$

となる.

発散積分 $\mathcal{I}$ の解釈については一言述べることが残っている. 最初に, 3 元運動量 $\mathbf{q}$ について積分する前に, (17.5.24) の q^0 の積分路を虚軸に回転することができる. いつものように, 分母の $-i\epsilon$ により反時計回りに回さなければならない. よって q^4 は $-\infty$ から $+\infty$ に向かって積分するとして, $q^0 = iq^4$ と置かなければならない. すると積分は,

$$\mathcal{I} = i\int_0^\infty \frac{2\pi^2 q^3 dq}{q^4} \tag{17.5.38}$$

となる. ここで q はユークリッド 4 元ベクトル (q^1, q^2, q^3, q^4) の大きさだ. さらに進むには, 積分を正則化する方法が明らかに必要だ. 紫外発散を処理する最も簡単な方法は単にスケール Λ 以上の q の積分を切断することだ. しかし, 赤外発散を処理するための小さな切断も必要だ. これは考えている状況の物理によって決まる. もし 4 個のベクトル粒子の運動量がゼロでなければ, 運動量はダイアグラムの内線を通って流れて, これらの運動量のスケール μ で赤外切断を与える. 同様に, もし $\Gamma[A]$ の A に関する 4 回汎関数微分を $A = 0$ ではなく有限の A で評価すると内線のプロパゲータはゼロ運動量では発散せず, $\mu \sim gA$ のスケールでの赤外切断を得る. いずれにしても, $\mathcal{I}$ は,

$$\mathcal{I} = 2\pi^2 i\int_\mu^\Lambda \frac{dq}{q} = 2\pi^2 i \ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \tag{17.5.39}$$

の形を取り, よって,

$$L_A = -\frac{g^2}{2\pi^2}\left(\frac{11}{12}C_1 - \frac{1}{3}C_2\right)\ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) + O(g^4) \tag{17.5.40}$$

となる. すると (17.4.48) よりくりこまれた結合定数は,

$$g_R = g\left[1 + \frac{g^2}{4\pi^2}\ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)\left(\frac{11}{12}C_1 - \frac{1}{3}C_2\right) + O(g^4)\right] \tag{17.5.41}$$

で与えられる．量子電磁理論では 11.2 節で議論した輻射補正により物理的な結合 g_R は裸の結合 g に比べて小さくなるが，非可換ゲージ理論では，フェルミオン多重項が十分小さくて $C_2 < 11C_1/4$ なら，物理的結合は裸の結合より大きくなることが分かる．この点の重要性は 18 章で明らかにされる．

あるいは，11.2 節で議論した次元正則化の方法によって紫外発散を処理することもできる．その場合は，(17.5.39) の代わりに，

$$\mathcal{I} = i\int_0^\infty \frac{2\pi^2 q^{d-1}dq}{(q^2+\mu^2)^2} \tag{17.5.42}$$

と書く．ここで d は複素次元で，計算の最後に 4 に近づけることが許される．また，μ は赤外切断定数で，ここでも外部の運動量 (あるいは背景場と g との積) の程度にとる．d が Re $d < 0$ を満たす複素数で $\mu^2 > 0$ である限り，この積分は有限の値，

$$\mathcal{I} = -i\pi^2\left(\frac{d}{2}-1\right)\mu^{d-4}\pi\Big/\sin\left[\left(\frac{d}{2}-2\right)\pi\right]$$

を持つ．$d \to 4$ に解析接続すると，これは，

$$\mathcal{I} \to -2i\pi^2\left[\frac{1}{d-4}+\ln\,\mu+\cdots\right] \tag{17.5.43}$$

となる．ここで「$\cdots$」は μ に依存しない有限の項だ．今の場合，

$$L_A = \frac{g^2}{2\pi^2}\left(\frac{11}{12}C_1-\frac{1}{3}C_2\right)\left(\frac{1}{d-4}+\ln\,\mu+\cdots\right)+O(g^4)$$

となるので，

$$g_R = g\left[1-\frac{g^2}{4\pi^2}\left(\frac{11}{12}C_1-\frac{1}{3}C_2\right)\left(\frac{1}{d-4}+\ln\,\mu+\cdots\right)+O(g^4)\right] \tag{17.5.44}$$

となる．ここでは紫外発散は違う形を取るが，赤外切断定数 μ への依存性は同じだ．(17.5.44) は 18.7 節での漸近自由性の議論の重要な入力になる．

問題

1. ラグランジアンがスカラー場を基本粒子として含むとき, 17.2 節で与えたくりこみ可能性の証明を実行せよ.

2. 17.2 節の最後に議論した BRST の量子化法を使って, 背景場ゲージでの非可換ゲージ理論の量子化を行え.

3. $\Gamma^{(1\ \mathrm{loop})}$ の時空に依存するゲージ場の 2 次項を計算して, くりこまれたゲージ結合とくりこまれていないゲージ結合との関係 (17.5.44) を導け.

4. スカラー場を基本粒子として含むゲージ理論において, くりこまれたゲージ結合とくりこまれていないゲージ結合の 1 ループの関係を計算せよ.

参考文献

1. J. Zinn-Justin, *Trends in Elementary Particle Theory — International Summer Institute on Theoretical Physics in Bonn 1974* (Springer-Verlag, Berlin, 1975).

2. BRST 対称性が発見される以前は, 非可換ゲージ理論のくりこみ可能性の証明は直接, ゲージ変換のスラブノフ・テイラー恒等式に基づいていた. これについては B. W. Lee and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev.* **D5**, 3121, 3137 (1972); *Phys. Rev.* **D7**, 1049 (1972); G. 't Hooft and M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B50**, 318 (1972); B. W. Lee, *Phys. Rev.* **D9**, 933 (1974) を見よ. BRST 対称性に基づいたくりこみ可能性の最初の証明は C. Becchi, A. Rouet, and R. Stora, *Commun. Math. Phys.* **42**, 127 (1975); *Renormalization*

Theory — Proceedings of the International School of Mathematical Physics at Erice, August 1975, G. Velo and A.S. Wightman 編 (D. Reidel, Dordrecht, 1976) pp. 269–97, 299–343 で与えられた. ここで与えた証明は J. Zinn-Justin, 参考文献 1; B. W. Lee, *Methods in Field Theory*, R. Balian and J. Zinn-Justin 編 (North-Holland, Amsterdam, 1976) pp. 79–139 の一般的な概説に従った.

3. ここでの考え方と提示の仕方は J. Gomis and S. Weinberg, Nucl. Phys. **B 469**, 475 (1996) に基づく. これらの方法をそれ以前に使ったものとしては以下を見よ. B. L. Voronov and I. V. Tyutin, *Theor. Math. Phys.* **50**, 218 (1982); **52**, 628 (1982); B. L. Voronov, P. M. Lavrov, and I. V. Tyutin, *Sov. J. Nucl. Phys.* **36**, 292 (1982); P. M. Lavrov and I. V. Tyutin *Sov. J. Nucl. Phys.* **41**, 1049 (1985); D. Anselmi, *Class. and Quant. Grav.* **11**, 2181 (1994); **12**, 319 (1995); M. Harada, T. Kugo, and K. Yamawaki, *Prog. Theor. Phys.* **91**, 801 (1994).

4. G. Barnich and M. Henneaux, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1588 (1994); G. Barnich, F. Brandt, and M. Henneaux, *Phys. Rev.* **51**, R143 (1995); *Commun. Math. Phys.* **174**, 57, 93 (1995); *Nucl. Phys.* **B455**, 357 (1995).

5. 背景場ゲージは B. S. De Witt, *Phys. Rev.* **162**, 1195, 1239 (1967) により導入された. 多重ループ効果の取り扱いについては以下を見よ. G 't Hooft, *Functional and Probabilistic Methods in Quantum Field Theory: Proceedings of the 12th Karpacz Winter School of Theoretical Physics* (Acta Universitatis Wratislavensis no. 38, 1975); B. S. De Witt, in *Quantum Gravity* II, C. Isham,

R. Penrose, and D. Sciama 編 (Oxford University Press, Oxford, 1982); L. F. Abbott, *Nucl. Phys.* **B185**, 189 (1981).

第18章

くりこみ群の方法

くりこみ群の方法は元は量子電磁理論において非常に高いエネルギーで摂動論が機能しないことに対処する方法として，ゲルマンとロー[1]によって導入された．例えば真空偏極 $\Pi_{\mu\nu}(q)$ のように，運動量の大きさが q 程度の振幅への n ループの寄与は，α^n の因子と共に $\ln(q^2/m_e^2)$ の因子を最大 n 個まで含んでいる．したがって，微細構造定数 α が小さいときでも，摂動論は $\alpha|\ln(q^2/m_e^2)|$ が大きいときにはうまく機能しない．非可換ゲージ理論のような質量がゼロの理論でも，くりこまれた結合定数が定義できるようにくりこみ点を指定するために，ある質量の次元を持った量 μ を導入する必要がある．この場合には，対数 $\ln(E/\mu)$ が現れ，もし $E \gg \mu$ か $E \ll \mu$ ならば，結合定数が小さくても摂動論はうまく働かない．

幸いなことにそのような場合にもしばしば適用される摂動論の修正版がある．この方法の鍵となる着想は，粒子の質量と直接的には何ら関係が無い変化するくりこみ点 μ で定義された結合定数 g_μ を導入することだ．このくりこみ点 μ を問題となる過程の典型的なエネルギー E と同じ大きさにとれば，因子 $\ln(E/\mu)$ は無害となる．そうすれば g_μ が小さな限り摂動論を適用できる．特に，μ で定義された結合定数が

わかれば, 摂動論を使ってエネルギー $\mu + d\mu$ で物理的振幅を計算し, それを使ってくりこみ点 $\mu + d\mu$ での結合定数を計算できる. その結果得られる微分方程式を積分して, 興味のあるエネルギー領域での結合定数を通常の結合定数と関係付けることができる. (「くりこみ群」という名前は, 元来, くりこまれた結合定数の再定義のもとで理論が見かけ上どのように変化するかについて関心が持たれたことによる. しかし, 実際には群論とは何の関係も無い.) くりこみ群の方法は非常に高いエネルギーか (質量がゼロの理論では) 非常に低いエネルギーで, 結合定数が大きすぎて摂動論が使えない場合にも, 理論がどのように振る舞うかについて定性的な指標を与える.

くりこみ群の方法は, 元来くりこまれた結合定数を定義するのに使われる処方箋の変化に関係して発展したが, いまではより広い意味を持っている. 裸の結合定数と場を, 典型的なエネルギーの大きさ μ で計算された行列要素を使って定義されたくりこまれた結合定数と場に置き換えるとき, 仮想的運動量についての積分は実質上 μ の大きさのエネルギーと運動量までで切断されている. したがって μ を変化させると, 実質上計算に入っている自由度を変えることになる. くりこみ群からは, 大きな対数因子を避けるためには μ を調べている過程のエネルギーの典型的な大きさ E にとるべきだということがわかるが, これは, あるエネルギーで計算を行うためにはまずそれより非常に高いエネルギーの自由度を取り除くべきだという, より広い原理の特別な場合になっている.

これを達成するには他にも様々な方法ある. 12.4 節で見たように, ウィルソンが最初に行なったくりこみ群の方法[2] では, 有限な切断を陽に導入し, 物理的な量がその切断に依存しないように理論のパラメータを切断に依存させる. このやり方では, 理論の対称性が許す限りの相互作用の種類を無限個導入する必要がある. したがって, 量子電磁理論のように実際にくりこみ可能な理論を扱うのに特に便利とはい

えない. (ただ, 12.3節で述べたように, 今日では量子電磁理論は, 高次元の相互作用がある非常に大きな質量の負の冪で押さえられているくりこみ不可能な理論の非常によい近似にしか過ぎないと見られている.) ゲージ理論を有限の時空の格子上で量子化して切断を導入すると, ウィルソンの方法にはゲージ不変性を明示的に保ったまま計算ができるという利点がある. (このとき, ゲージ群の体積は大域的対称性の群の体積を格子点の数だけかけたものだ.) しかし, これにはローレンツ群と回転群のもとでの不変性が明白でないという不便な点もある. いずれの場合にも, くりこみ群の形式は, 高エネルギーの自由度を消去するのにどのようなやり方を取るにせよ, ほぼ同じだ.

18.1 大きな対数はどこから来るか？

まず, 非常に大きなエネルギーで大きな対数部分がどのように生じるかを考える. 物理的な振幅か断面積, もしくは他の率を表わす量 $\Gamma(E, x, g, m)$ が, エネルギーの全体的な大きさ E, 各種の角度とエネルギーの比率 (これらをまとめて x と書く), 各種の無次元の結合定数 (まとめて g と書く), 各種の質量 (まとめて m と書く) に依存するとする. もし, Γ が [質量]^D の次元 (例えば, 断面積は $D = -2$ を持つ) だとすると, 簡単な次元解析から,

$$\Gamma(E, x, g, m) = E^D \Gamma\left(1, x, g, \frac{m}{E}\right) \tag{18.1.1}$$

がわかる. $E \to \infty$ の極限では, そのような振幅は単純な冪,

$$\Gamma(E, x, g, m) \longrightarrow E^D \Gamma(1, x, g, 0)$$

のように振舞うと思えるかもしれない. しかしそのようにはならない. そのかわりに, 摂動論の計算では, 因子 E^D には $\ln(E/m)$ の冪が付くことがわかる. このせいで上の単純な冪の振舞いにはならない.

明らかに, エネルギー E を固定して $m \to 0$ とする極限で振幅 Γ が特異的なときにのみ, m を固定して $E \to \infty$ とする極限で $\ln(E/m)$ の冪が入ることができる. そのような質量特異性には 2 種類ある. 一つは単に適切な振幅や反応率を計算することで避けられるものであり, もう一つはくりこみの処方の変更が必要なものだ.

第 1 の種類のゼロ質量の特異性は幾つかの粒子のプロパゲーターの極が合流することにより起こる. 例えば, あるファインマン・ダイアグラムに 4 元運動量 p^μ の入射する線があり, それが付いている頂点には, 質量 $m_1, m_2, \ldots, m_n$ の内線も付いているとする. 10 章の議論にしたがえば, このファインマン・ダイアグラムは p^2 の負の実軸上, $p^2 = -(m_1 + \ldots + m_n)^2$ から $-\infty$ までカットを持つ. 外線が $M < m_1 + \ldots + m_n$ の安定粒子ならば $p^2 = -M^2$ はカットの上にはなく, このカットは何も特異性をもたらさない. しかし, $M, m_1, \ldots, m_n$ が全てゼロになるときには, 質量殻上での $-p^2$ の値と, このカットの端の分岐点はいっしょに動き, $p^2 = 0$ で一致し, 特異性をもたらす.

これより, この $m = 0$ での赤外発散は, 単に質量殻上に乗らないことで避けることができることが示唆される. これには, 例えば, 全ての外線の p^2 を全てのエネルギー変数と共に$+\infty$ に持っていけばよい. そのときには, 分散関係か他の何らかの解析接続の技法を使って, この極限でのファインマン振幅の振舞いから S 行列要素について何らかの結果を引き出さなければならない. しかし, しばしば我々に興味があるのは質量殻上の S 行列要素ではなく, どの質量とも無関係な運動量 q を持つカレントの行列要素なので, この接続は必要が無い. 例えば, 10.5 節で定義した真空偏極関数 $\pi(q^2)$ は $q^2 < 0$ でない限り第 1 種のゼロ質量特異性を持たない.

第 1 種の質量特異性を消す方法はもう一つある. それは典型的には $m \to 0$ で測定不可能になる断面積を計算しようとするとゼロ質量の特異性が発生することに気付くとよい. 例えば, 量子電磁理論では一

定の数の電子と光子を含む過程の断面積は，軟光子の数について無限まで足し上げても，$m_e \to 0$ で赤外発散する．これは，$m_e \to 0$ では，電子，陽電子，光子が全て同じ速さで同じ方向に進んでいて全電荷が $-e$ であるジェットと電子一個が区別できないためだ．13 章で示したように，このような赤外発散は $m_e \to 0$ の極限でも測定可能な適切な積分断面積のみを考えることで救われる．例えば，特定のコンプトン散乱過程の断面積を計算しようとする代りに，全電荷が $-e$ のジェットと全電荷がゼロのジェットが，そのようなジェット二つと軟光子に散乱する断面積を計算すればよい．そのような包含反応率や断面積は全ての質量がゼロになっても有限に留まり，「赤外安全」と呼ばれる．

しかし，これで全ての困難が克服できたわけではない．断面積を積分するか，質量殻に乗らないことで赤外発散を避けても，積分された断面積や質量殻外でのエネルギー E での振幅は第 2 種の質量特異性を持ち，$\ln(E/m)$ の因子を生じて次元解析から示唆される単純な冪の振舞いを破る．それは，くりこまれた結合定数は通常，全ての質量がゼロとなるときに赤外発散する振幅を使って定義されていることによる．例えば，以下のラグランジアン密度を持つ実のスカラー場の理論を考える．

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{24}g\,\phi^4. \tag{18.1.2}$$

1 ループの次数では，初期運動量 p_1, p_2 と終期運動量 p_1', p_2' の散乱過程の不変弾性散乱振幅は (12.2.24) によって，以下のように与えられる．

$$\begin{aligned}A = g - \frac{g^2}{32\pi^2}\int_0^1 dx\Bigg\{&\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2 - sx(1-x)}\right)\\&+\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2 - tx(1-x)}\right) + \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2 - ux(1-x)}\right) - 3\Bigg\}\\&+O(g^3)\,.\end{aligned} \tag{18.1.3}$$

ここで, s, t, u はマンデルシュタム変数,

$$s = -(p_1 + p_2)^2 \,, \quad t = -(p_1 - p_1')^2 \,, \quad u = -(p_1 - p_2')^2$$

であり, Λ は紫外発散だ. この振幅は s, t, u を正の実軸から離しておく限りゼロ質量の特異性を持たない. 特に, これらの変数は全て $-\infty$ に近づいてもよい. (これにより $s+t+u = 4m^2$ という質量殻条件は破られる.) もちろん, この振幅は m のみならず切断 Λ にも依存するから, ゼロ質量の特異性が無くても, s, t, u が $-\infty$ になるときに単純なスケール変換の議論から期待されるような $A \to$ [定数] という結果は生じない. 切断への依存性は, くりこみによって埋もれさすことができる. つまり, 裸の結合定数 g を, ある便利なくりこみ点での A の値と定義したくりこまれた結合定数 g_R で置き換えればよい. 例えば, 以下のように取ってもよい.

$$\begin{aligned} g_R &\equiv A(s=t=u=0) \\ &= g - \frac{3g^2}{32\pi^2}\left\{\ln\frac{\Lambda^2}{m^2} - 1\right\} + O(g^3)\,. \end{aligned} \tag{18.1.4}$$

こうすると, (18.1.3) は,

$$\begin{aligned} A = g_R + \frac{g_R^2}{32\pi^2}\int_0^1 dx\Bigg\{ &\ln\left(1 - \frac{sx(1-x)}{m^2}\right) \\ &+ \ln\left(1 - \frac{tx(1-x)}{m^2}\right) + \ln\left(1 - \frac{ux(1-x)}{m^2}\right)\Bigg\} \\ &+ O(g_R^3) \end{aligned} \tag{18.1.5}$$

となる. (第 2 項では g^2 を自由に g_R^2 と置き換えられる. これは, それによる差は g^3 の次数だからだ.) この量は紫外発散しない. しかし, 今度は s, t, u が全て負であっても $m=0$ での特異性を持つ. そのため, s, t, u が全て $-\infty$ に近づいても, 振幅の漸近的な振舞いは以下のようになり, またしても単純なスケールの議論から期待される結果と一致しない.

$$A \to g_R + \frac{g_R^2}{32\pi^2}\left\{\ln\left(\frac{-s}{m^2}\right) + \ln\left(\frac{-t}{m^2}\right) + \ln\left(\frac{-u}{m^2}\right) - 6\right\}. \tag{18.1.6}$$

(他のどのような「自然な」くりこまれた結合定数の定義を採用してもほぼ同じことになる. 例えば, g_R を質量殻上の対称点 $s = t = u = 4m^2/3$ での A の値と定義すると, (18.1.6) と同じ漸近的振舞いで, -6 が他の定数値に置き換えられたものとなる.) A を g_R を使って表わしたときに生じるゼロ質量の特異性は, くりこまれた結合定数 g_R を裸の結合定数 g で表わす式 (18.1.4) の $\ln m^2$ 項のみから生じていることは明らかだ.

これに加えて, 断面積の積分ではなく, 演算子の行列要素 (質量殻外のファインマン振幅など) を計算する際に出会うゼロ質量の特異性もある. それは, 結合定数のみならずこれらの演算子をもくりこむ必要性から生じる. 例えば, (18.1.2) のラグランジアンを持つスカラー場の理論で, 以下の演算子のある行列要素 $\langle\beta|\mathcal{O}(p)|\alpha\rangle$ を計算したいとする.

$$\mathcal{O}(p) \equiv \int d^4x\, e^{-ip\cdot x}\phi^2(x)\,. \tag{18.1.7}$$

ファインマン・ダイアグラムでは, これは $\alpha \to \beta$ の遷移のダイアグラムに, 二本の ϕ の内線が出会う頂点を挿入することに相当する. この二本の内線の全 4 元運動量は p だ. (図 18.1 を見よ.) 紫外発散は, この新しい頂点が含まれる部分ダイアグラムが残りの部分に 2 本だけの ϕ の線で結合しているときに起こる. (図 18.2 を見よ.) 次元解析によれば, この部分ダイアグラムは, 残りの部分に 3 本以上の ϕ の線で結合していれば収束する. これは ϕ^2 の相互作用は $+2$ の次元を持ち, そのためにこの頂点が残りの部分に $n > 2$ 本の線で結合していれば部分ダイアグラムの次元が $4 - 2 - n < 0$ となるからだ. この部分ダ

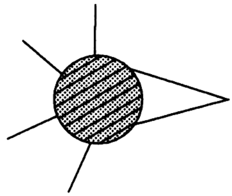


図 18.1: 基本スカラー場 $\phi(x)$ の理論において, 演算子 $\int d^4x \exp(-ip\cdot x)$ $\phi^2(x)$ の行列要素を求める運動量空間のファインマン・ダイアグラム. 斜線の引かれた円は図に示された外線を持つダイアグラムの和を表わしている. 円に付いている外線のうち, ϕ^2 の頂点で出会う一対の外線を除く他の線は, 行列要素を計算するための始状態と終状態にある粒子を意味する.

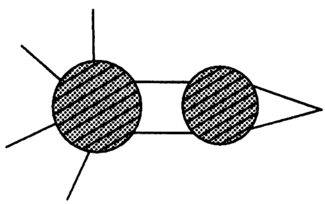


図 18.2: 演算子 $\int d^4x \exp(-ip\cdot x)\,\phi^2(x)$ の行列要素の紫外発散するファインマン・ダイアグラム. 記法は図 18.1 と同じ.

イアグラムの発散部分は単に対数発散する定数であり, ϕ^2 の行列要素は ϕ^2 に適切な発散常数 Z_{ϕ^2} をかけることで有限にできる.* g^2 の次数では, 関与する部分ダイアグラムは図 18.3 のダイアグラムであり, これは $\mathcal{O}(p)$ の行列要素に以下の発散因子の寄与をする.

$$F(p) = 1 + \frac{1}{2}\left[-i(2\pi)^4 g\right]\left[\frac{-i}{(2\pi)^4}\right]^2 \times \int \frac{d^4k}{[k^2+m^2-i\epsilon]\,[(p-k)^2+m^2-i\epsilon]}\,. \quad (18.1.8)$$

*この議論では ϕ^2 の頂点を含み部分ダイアグラムの残りの部分に単に 2 本の ϕ の線でつながっている部分ダイアグラムの 1 部分から来る発散は同じように消去できると仮定している.

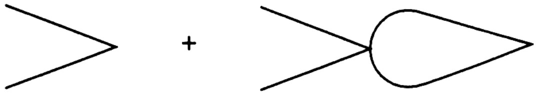


図 18.3: 1 ループまでの図 18.2 のダイアグラムの発散部分.

分母を結合し，k^0 積分の径路を回し，紫外切断定数 Λ を導入して $\Lambda \to \infty$ とすると以下の結果を得る.

$$F(p) = 1 - \frac{g}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2 + p^2 x(1-x)} \right) - 1 \right] + O(g^2) . \tag{18.1.9}$$

これは (p^2 を正に保つ限り) ゼロ質量の特異性を持たない. しかし，この量はもちろん切断定数に依存している. この対数発散はくりこまれた ϕ^2 演算子,

$$(\phi^2)_R = N^{(\phi^2)} \phi^2 \tag{18.1.10}$$

を定義することで消すことができる. ここで，$N^{(\phi^2)}$ はある一定のくりこみ点で $N^{(\phi^2)} F(p)$ がある一定の有限な値をとるように選ぶ. 例えば，くりこまれた ϕ^2 演算子を

$$N^{(\phi^2)} F(0) = 1 \tag{18.1.11}$$

となるように定義すると，

$$N^{(\phi^2)} = 1 + \frac{g}{32\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - 1 \right) + O(g^2) \tag{18.1.12}$$

となる. このとき，くりこまれた演算子 $(\phi^2)_R$ の行列要素は因子,

$$\begin{aligned} F_R(p) &\equiv N^{(\phi^2)} F(p) \\ &= 1 + \frac{g}{32\pi^2} \int_0^1 dx \, \ln \left(1 + \frac{p^2 x(1-x)}{m^2} \right) + O(g^2) \end{aligned} \tag{18.1.13}$$

を含む. これは全ての $p^2>0$ と $m^2>0$ に対して有限だが, $m\to 0$ での赤外発散を含む. これは $p^2\to +\infty$ で漸近的に大きな対数的寄与をする. もちろん, より高次の計算で切断定数を消去するには, くりこまれた ϕ^2 演算子のみならず, くりこまれた結合定数も導入する必要があり, それらの両方から対数的振舞いが発生する.

$\phi^2(x)$ だけではなく, どんな種類の演算子にも同様なくりこみ因子が必要だ. 特に, 理論の基本場の一つ ψ の行列要素をとると, そのプロパゲーターの輻射補正から紫外発散が生じる. 12 章で見たように, これらの無限大はくりこまれた場 ψ_R,

$$\psi_R = N^{(\psi)}\psi \tag{18.1.14}$$

を使うことで打ち消すことができる. ここで, $N^{(\psi)}$ は ψ_R の 1 粒子状態と真空の間の行列要素が相互作用の無いときに通常の規格化をされた場についてと同じになるように決める. これはくりこみ理論の通常の Z 因子と,

$$Z^{(\psi)} = |N^{(\psi)}|^{-2} \tag{18.1.15}$$

のように関係している.

例えば, スピノル量子電磁理論の光子場のくりこみについて我々が以前に得た結果を思い起こそう.** この場合には, くりこまれた電磁場 A^μ_R は通常「裸の」場 A^μ_B を使って,

$$A^\mu_R = Z_3^{-1/2} A^\mu_B$$

と書かれる. ここで, Z_3 は (11.2.21) より,

$$Z_3 = 1 - \frac{e^2}{12\pi^2}\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) + O(e^4) \tag{18.1.16}$$

** 上で例として扱った, ϕ^4 の相互作用をもつスカラー場の理論では, $N^{(\phi)}$ の最低次の項は 2 ループのダイアグラムから生じた. このため, 因子 N の計算の例としてはこの理論は適切ではない.

と与えられる. これはゼロ質量の特異性を持っていて, くりこまれた光子場の行列要素の漸近的振舞いに影響する. 特に, (11.2.22) はくりこまれた電磁場の自己エネルギー関数を,

$$\pi(q^2) = \frac{e_R^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx\, x(1-x) \ln \left[1 + \frac{q^2 x(1-x)}{m^2}\right] + O(e_R^4) \tag{18.1.17}$$

と与える. これは, $m = 0$ で特異性を持つから, その漸近的振舞いには大きな対数的寄与がある. 実際, $q^2 \to +\infty$ では

$$\pi(q^2) \longrightarrow \frac{e_R^2}{2\pi^2} \left[\frac{1}{6} \ln \frac{q^2}{m^2} - \frac{5}{18}\right] + O(e_R^4) \tag{18.1.18}$$

となる.

電磁理論は 電磁場のくりこみに現れる定数 Z_3 が電荷のくりこみにも,

$$e_R = Z_3^{1/2}\, e_{\mathrm{BARE}} \tag{18.1.19}$$

のように登場するという特別な性質がある. しかし, これは一般的には成立しない. くりこみ群の技法は最初に量子電磁理論に適用されたが, ここで論じたスカラー場の理論は場と結合定数のくりこみが別であり, このためこれらの方法の適用例としてはより典型的なものとなっている.

18.2 変化するスケール

前の節で, 適切な積分断面積や質量殻外のファインマン振幅の高エネルギーで現れる大きな対数は, くりこまれた結合定数や演算子を定義する処方箋にその源をたどれることを見た. くりこみ群の中心的なアイデアは, この処方を変えることにある.

くりこまれた結合定数 $g(\mu)$ が, 変化するエネルギーのスケール μ に依存するが (少なくとも $\mu \gg m$ で) 理論の質量の大きさ m には

依存しないような新しい処方箋を見つけたとする. すると, 適切な積分断面積や他の赤外安全な反応率は g_R ではなく g_μ および μ の関数として表わされる. 次元解析から, そのような関数は以下のように書ける.

$$\Gamma(E, x, g_\mu, m, \mu) = E^D \, \Gamma\left(1, x, g_\mu, \frac{m}{E}, \frac{\mu}{E}\right) . \tag{18.2.1}$$

(ここでの記法は 18.1 節と同じだ. 特に, x は Γ が依存する全ての無次元の角度, エネルギー比等を意味する.) μ は完全に任意なくりこみのスケールなので, $\mu = E$ と選べる. このとき, (18.2.1) は,

$$\Gamma(E, x, g_\mu, m, \mu) = E^D \, \Gamma\left(1, x, g_E, \frac{m}{E}, 1\right) \tag{18.2.2}$$

となる. これは, $m \ll E$ に対して g_E が m に依存しないので, ゼロ質量での特異性を持たない. したがって, 大きな対数も無く, g_E 自身が十分に小さい限り摂動論を使って Γ を g_E の関数として計算できる. とくに, 摂動論の有限な任意の次数で, Γ は $E \gg m$ で以下の漸近的振舞いをする.

$$\Gamma(E, x, g_\mu, m, \mu) \longrightarrow E^D \, \Gamma(1, x, g_E, 0, 1) . \tag{18.2.3}$$

(非摂動的な補正は 18.4 節で考察する.)

残るは g_E の計算だ. 例えば, (18.1.2) のラグランジアンを持つスカラー場の理論では, g_μ を散乱振幅のくりこみ点 $s = t = u = -\mu^2$ での値を使って以下のように定義できる.

$$\begin{aligned} g_\mu &\equiv A(s = t = u = -\mu^2) \\ &= g - \frac{3g^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2 + \mu^2 x(1-x)} \right) - 1 \right\} + O(g^3) . \end{aligned} \tag{18.2.4}$$

これは, 通常のくりこまれた結合定数 (18.1.4) を使うと,

$$g_\mu = g_R + \frac{3g_R^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \, \ln\left(1 + \frac{\mu^2 x(1-x)}{m^2}\right) + O(g_R^3) \tag{18.2.5}$$

となる．しかし，この表式は補正項が g_R より小さい，つまり $|g_R \ln(\mu/m)| \ll 1$ のときにのみ信頼できる．これが $\mu \simeq E$ で成り立っているならば，通常の摂動論だけで足り，くりこみ群は必要無い．

大きな μ について直接に (18.2.5) のような表式を使う代りに，段階を追って進む必要がある．μ/m が 1 よりそれほど大きくない限り g_μ は g_R の関数として計算できる．次に，μ'/μ が 1 よりそれほど大きくない限り $g_{\mu'}$ は g_μ の関数として計算できる．これを続けていき，g_E に達する．これを離散的な段階を経て行わずに，連続的に行うこともできる．次元解析から，$g_{\mu'}$ と g_μ の関係は，

$$g_{\mu'} = G(g_\mu, \mu'/\mu, m/\mu) \tag{18.2.6}$$

という形になることがわかる．これを μ' に関して微分し，$\mu' = \mu$ と置くと，

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_\mu = \beta \left(g_\mu, \frac{m}{\mu} \right) \tag{18.2.7}$$

という微分方程式が得られる．ここで，

$$\beta \left(g_\mu, \frac{m}{\mu} \right) \equiv \left[\frac{\partial}{\partial z} G(g_\mu, z, m/\mu) \right]_{z=1} \tag{18.2.8}$$

と定義されている．ここにはゼロ質量の特異性はないから，この微分方程式は $\mu \gg m$ において，単に，

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_\mu = \beta(g_\mu, 0) \equiv \beta(g_\mu) \tag{18.2.9}$$

となる． これはしばしば，キャラン・ジマンチック方程式 (Callan–Symanzik equation) と呼ばれる.[1] 微分方程式 (18.2.9) を，あるスケール $\mu = M$ での初期値を g_M として積分し，g_E を計算する．このスケール M は実際には，$\mu \geq M$ で質量 m が μ にくらべて無視できるように大きくとり，しかし，大きな対数 $\ln(M/m)$ のせいで摂動論で g_M を通常のくりこまれた結合定数 g_R の関数として計算できなくな

ることのない程度に小さくとる. $\beta(g)$ が g_M と g_E の間でゼロとならない限り, 解は形式的に,

$$\ln(E/M) = \int_{g_M}^{g_E} dg/\beta(g) \tag{18.2.10}$$

と書ける.

前の段落の結果は摂動論に依存していない. しかし, 通常は関数 G と β を計算するのに摂動論を使う必要がある. 例として $g\phi^4/24$ の相互作用ハミルトニアン密度を持つスカラー場の理論で, g を g_R ではなく g_μ で表わしてくりこみを行い, $g_{\mu'}$ を計算してみる. (18.2.5) を得たのと同じやり方をすると,

$$g_{\mu'} = g_\mu - \frac{3g_\mu^2}{32\pi^2}\int_0^1 dx\,\ln\left(\frac{m^2+\mu^2 x(1-x)}{m^2+\mu'^2 x(1-x)}\right) + O(g_\mu^3)$$

を得る. これと, (18.2.8) から,

$$\beta\left(g_\mu, \frac{m}{\mu}\right) = +\frac{3g_\mu^2}{16\pi^2}\int_0^1 dx\,\frac{\mu^2 x(1-x)}{m^2+\mu^2 x(1-x)} + O(g_\mu^3) \tag{18.2.11}$$

となる. $\mu \gg m$ のとき, これは,

$$\beta(g_\mu) = \frac{3g_\mu^2}{16\pi^2} + O(g_\mu^3) \tag{18.2.12}$$

となる. 次の次数では, $\mu \gg m$ のときのベータ関数は,[3]

$$\beta(g_\mu) = g_\mu\left[3\left(\frac{g_\mu}{16\pi^2}\right) - \frac{17}{3}\left(\frac{g_\mu}{16\pi^2}\right)^2 + \cdots\right]$$

であることが知られている.

もし 1 ループだけでよいなら, $\beta(g)$ の計算はもっと簡単にできる. μ の大きさのエネルギーで行列要素に大きな対数補正が出るのを避けるには, 裸の結合定数 g を有限なくりこまれた結合定数 g_μ を使って,

$$g = g_\mu + B(g_\mu)\ln\frac{\Lambda}{\mu} + \cdots \tag{18.2.13}$$

と書かなければならない．例えば，(18.1.3) からただちに，g の $\ln\Lambda$ 項の係数が，

$$B(g) = -\frac{3}{2}\left[-i(2\pi)^4 g^2\right]\left[\frac{-i}{(2\pi)^4}\right]^2 2\pi^2 i = \frac{3g^2}{16\pi^2} \tag{18.2.14}$$

となることが読み取ることもできた筈だ．裸の結合定数はもちろん μ に依存しないから，最低次では，

$$\mu\frac{d}{d\mu}g_\mu - B(g_\mu) = 0$$

となる．したがって，最低次では，

$$\beta(g) = B(g) \tag{18.2.15}$$

だ．(18.2.14) の $B(g)$ をとると，スカラー場のϕ^4 理論の$\beta(g)$ についての前の結果 (18.2.12) と一致する．

ゲージ不変性と抵触する単純な紫外切断を使う代りに，しばしばより便利な次元正則化を使って紫外発散を取り扱うこともよく行われる．時空の次元が $d<4$ であるとき，$\ln(\Lambda/\mu)$ の代りに収束する積分，

$$\int_\mu^\infty k^{d-4}\frac{dk}{k} = \frac{\mu^{d-4}}{4-d} \xrightarrow{d\to 4} \left[\frac{1}{4-d} - \ln\mu\right]$$

が生じる．したがって切断への依存性を消去するために，くりこまれていない結合定数を (18.2.13) のように書く代りに，前と同じ関数 $B(g_\mu)$ を使って，

$$g = g_\mu + B(g_\mu)\left[\frac{1}{4-d} - \ln\mu\right] \tag{18.2.16}$$

と書くことができる．したがって，$\beta(g_\mu)$ を計算するには，くりこまれた結合定数の特異性を持つ因子 $1/(4-d)$ の係数を拾い上げるだけでよい．これは 18.6 節で摂動論の全次数に拡張する．

(18.1.2) のラグランジアンを持つスカラー場の理論においては，g_μ が十分に小さい限り，(18.2.9) と (18.2.12) の解は以下でよく近似で

きる.

$$g_\mu = -\frac{16\pi^2}{3\ln(\mu/M)} \ . \tag{18.2.17}$$

ここで, M は積分定数だ. この表式から, g_R のような無次元の結合定数が M のような質量の次元を持つ量で置き換えられるという, くりこみ群の計算に共通の性質が浮かび上がる. M の値を g_R と関係付けるには, μ が $\mu \gg m$ という近似が使えるほどに大きく, しかし, $|g_R \ln(\mu/m)| \ll 1$ が成立して, (18.2.5) から,

$$g_\mu \simeq g_R + \frac{3g_R^2}{16\pi^2}\ln\left(\frac{\mu}{m}\right) \tag{18.2.18}$$

となる程度には小さい領域での結合定数の振舞いと解 (18.2.17) を比べればよい. このようにして,

$$M \simeq m \exp\left(\frac{16\pi^2}{3g_R}\right) \tag{18.2.19}$$

がわかる. このため, (18.2.17) はより通常の形,

$$g_\mu = g_R \left[1 - \frac{3g_R}{16\pi^2} \ln \frac{\mu}{m}\right]^{-1} \tag{18.2.20}$$

と書くことができる. 繰り返しになるが, g_μ が小さければ, $|g_R \ln(\mu/m)|$ が 1 の大きさであってもこれは成立する. したがって, 摂動論の結果 (18.2.18) より大きく改善されている. もちろん, g_μ が小さいという条件は $g_R \ln(\mu/m)$ が臨界値 $16\pi^2/3$ に十分近いと成立しない. しかし, 少なくとも (18.2.20) は, (18.2.19) の臨界値より下のあるエネルギー E で g_E が大きくなり摂動論が適用できなくなるというあいまいさのない予言を与える.

積分断面積ではなく演算子の質量殻外での行列要素を計算するには, 行列要素が有限となるようにくりこまれた演算子の定義に現れる N 因子も考慮に入れなければならない. 前の節で, これらの N 因子が通常のように (例えば, 演算子の 4 元運動量がゼロか, 演算子が質量殻

上の場であるときに，発散する部分ダイアグラムの補正因子が打ち消されるように）定義されたら，N 因子の表式は (18.1.12) か (18.1.16) のようなゼロ質量の特異性を持ち，エネルギーが $E \gg m$ のときに大きな対数をもたらすことを見た．これを避けるには，変化するスケール μ でくりこみ定数 $N_\mu^{(\mathcal{O})}$ を定義し，くりこまれた演算子，

$$\mathcal{O}_\mu = N_\mu^{(\mathcal{O})}\,\mathcal{O} \tag{18.2.21}$$

の行列要素において，演算子 $\mathcal{O}$ を含む発散部分ダイアグラムが与える補正因子が，μ の大きさの 4 元運動量で特徴づけられるくりこみ点で打ち消されるようにする．もし，M_R が通常のようにくりこまれた演算子の行列要素であり，M が (18.2.21) のようにくりこまれた演算子の行列要素なら，任意の μ について，

$$M_R = \left[\prod_{\mathcal{O}} \left(N^{(\mathcal{O})} \Big/ N_\mu^{(\mathcal{O})}\right)\right] M(E, x, g_\mu, m, \mu) \tag{18.2.22}$$

となる．また次元解析を使って，（M が次元 D を持つとして）$\mu = E$ とすると，この式を以下のように書くことができる．

$$M_R = E^D \left[\prod_{\mathcal{O}} \left(N^{(\mathcal{O})} \Big/ N_E^{(\mathcal{O})}\right)\right] M\left(1, x, g_E, \frac{m}{E}, 1\right). \tag{18.2.23}$$

したがって質量殻外の振幅 M_R の高エネルギーでの振舞いを知るには，N_μ がくりこまれたスケール μ とともにどう変化するかを知る必要がある．

任意の二つのスケール μ と μ' について，くりこまれた演算子 $N_\mu^{(\mathcal{O})}\mathcal{O}$ と $N_{\mu'}^{(\mathcal{O})}\mathcal{O}$ は，ともに有限な行列要素を持つ．したがって，比 $N_{\mu'}^{(\mathcal{O})}/N_\mu^{(\mathcal{O})}$ は切断に依存しない．次元の考察から，この比は以下の形をとらなければならないことがわかる．

$$N_{\mu'}^{(\mathcal{O})} \Big/ N_\mu^{(\mathcal{O})} = G^{(\mathcal{O})}(g_\mu, \mu'/\mu, m/\mu)\,. \tag{18.2.24}$$

μ' について微分し, $\mu' = \mu$ として,

$$\mu \frac{d}{d\mu} N_\mu^{(\mathcal{O})} = \gamma^{(\mathcal{O})}(g_\mu, m/\mu)\, N_\mu^{(\mathcal{O})} \tag{18.2.25}$$

を得る. ここで,

$$\gamma^{(\mathcal{O})}(g_\mu, m/\mu) \equiv \left[\frac{\partial}{\partial z} G^{(\mathcal{O})}(g_\mu, z, m/\mu)\right]_{z=1} \tag{18.2.26}$$

とした. 解は,

$$N_E^{(\mathcal{O})} \propto \exp\left[\int^E \gamma^{(\mathcal{O})}\left(g_\mu, \frac{m}{\mu}\right) \frac{d\mu}{\mu}\right] \tag{18.2.27}$$

だ. これは変化するスケールを導入したために $N_\mu^{(\mathcal{O})}$ と $N_{\mu'}^{(\mathcal{O})}$ にゼロ質量の特異性が現れず, したがって $G^{(\mathcal{O})}$ と $\gamma^{(\mathcal{O})}$ にも特異性が現れないので有用な結果だ. これにより, g_μ が小さい限り, $\gamma^{(\mathcal{O})}$ を計算するのに摂動論の適用を妨げる対数が現れない. また, $\mu \gg m$ では, $\gamma^{(\mathcal{O})}(g_\mu, m/\mu)$ には,

$$\gamma^{(\mathcal{O})}(g_\mu) \equiv \gamma^{(\mathcal{O})}(g_\mu, 0) \tag{18.2.28}$$

の滑らかな極限が存在する.

例として $g\phi^4/24$ の相互作用のあるスカラー場の理論において演算子 $\mathcal{O} = \phi^2$ を考える. (18.1.9) の補正因子が $p^2 = 0$ で打ち消されるようにくりこむ代りに, 新しいくりこまれた ϕ^2 演算子 $N_\mu^{(\phi^2)}\phi^2$ を導入して, 変化するスケール $p^2 = \mu^2$ でその補正因子を打ち消す. こうすると,

$$\begin{aligned} N_\mu^{(\phi^2)} &\equiv F^{(\phi^2)}(\mu^2)^{-1} \\ &= 1 + \frac{g}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[\ln\left[\frac{\Lambda^2}{m^2 + \mu^2 x(1-x)}\right] - 1\right] \\ &\quad + O(g^2) \end{aligned}$$

となる. これにより, この演算子に対して関数 (18.2.24) は,

$$G^{(\phi^2)}\left(g_\mu, \frac{\mu'}{\mu}, \frac{m}{\mu}\right) \equiv \frac{N_{\mu'}^{(\phi^2)}}{N_\mu^{(\phi^2)}}$$
$$= 1 + \frac{g_\mu}{32\pi^2}\int_0^1 dx\, \ln\left[\frac{m^2+\mu^2 x(1-x)}{m^2+\mu'^2 x(1-x)}\right]$$
$$+ O(g_\mu^2)$$

となる. (ここで, g や $g_{\mu'}$ の代りに g_μ を使えるのは, その差が g_μ^2 かそれより高次になるためだ.) したがって, (18.2.26) より,

$$\gamma^{(\phi^2)}\left(g_\mu, \frac{m}{\mu}\right) = -\frac{g_\mu}{16\pi^2}\int_0^1 \frac{\mu^2 x(1-x)}{m^2+\mu^2 x(1-x)}\,dx + O(g_\mu^2)$$

となる. これは, $\mu \gg m$ では,

$$\gamma^{(\phi^2)}(g_\mu) = -\frac{g_\mu}{16\pi^2} + O(g_\mu^2) \tag{18.2.29}$$

となる.

他のよい例としては, 量子電磁理論の電磁場のくりこみに伴う N 因子がある. 光子のプロパゲーターはくりこまれた電磁場について計算する, すなわちくりこまれていない場のプロパゲーターに Z_3^{-1} をかけることで全ての運動量について有限となることはすでに見た.

$$\tilde{\Delta}_{\rho\sigma}(q) = Z_3^{-1}\Delta_{\rho\sigma}(q)\,. \tag{18.2.30}$$

(10.5.17) から, このくりこまれたプロパゲーターは,

$$\tilde{\Delta}_{\rho\sigma}(q) = \frac{\eta_{\rho\sigma}}{[q^2-i\epsilon][1-\pi(q^2)]} + [\,q_\rho q_\sigma \text{項}\,] \tag{18.2.31}$$

と書くことができる. こうする代りに, くりこまれた場 $N_\mu^{(A)}A^\rho$ を導入し, そのプロパゲーターに $\eta_{\rho\sigma}/[q^2-i\epsilon]$ に比例する項があり, その項の係数が変化するくりこみ点 $q^2=\mu^2$ で 1 に等しいように定義する. この目的のためには, 明らかに,

$$N_\mu^{(A)} = Z_3^{-1/2}[1-\pi(\mu^2)]^{1/2} \tag{18.2.32}$$

としなければならない. (11.2.22) を使うと, 関数 (18.2.24) は,

$$G^{(A)}(g_\mu, \mu'/\mu, m/\mu) = \left[\frac{1-\pi(\mu'^2)}{1-\pi(\mu^2)}\right]^{1/2}$$
$$= 1 - \frac{e_\mu^2}{4\pi^2}\int_0^1 dx\, x(1-x)\ln\left[\frac{m^2+\mu'^2 x(1-x)}{m^2+\mu^2 x(1-x)}\right]$$
$$+ O(e_\mu^4) \tag{18.2.33}$$

となる. したがって, (18.2.26) から,

$$\gamma^{(A)}(e_\mu, m/\mu) = -\frac{e_\mu^2}{2\pi^2}\int_0^1 dx\, \frac{x^2(1-x)^2\mu^2}{m^2+\mu^2 x(1-x)} + O(e_\mu^4) \tag{18.2.34}$$

となる. 約束したように, これには $\mu \gg m$ において滑らかな極限,

$$\gamma^{(A)}(e_\mu) \equiv \gamma^{(A)}(e_\mu, 0) = -\frac{e_\mu^2}{12\pi^2} + O(e_\mu^4) \tag{18.2.35}$$

がある.

すでに述べたように電磁理論は特別であって, くりこまれた電磁場の定義のくりこみ定数 $Z_3^{-1/2}$ がちょうどくりこまれた電子の電荷を定義するのに使われる定数の逆になっている, つまり $e_R = Z_3^{1/2}e$ だという特殊性がある. したがって, 変化するスケール μ でくりこまれた電荷の自然な定義は,

$$e_\mu = N_\mu^{(A)-1} e = Z_3^{-1/2} N_\mu^{(A)-1} e_R \tag{18.2.36}$$

であり, e_μ とスケール μ でくりこまれた場 $N_\mu^{(A)} A^\rho$ の積は, μ に依存しない. (18.2.25) より, $\mu \gg m$ で (18.2.9) によって μ を e_μ に依存させる関数 $\beta(e)$ は,

$$\beta(e) = -e\gamma^{(A)}(e) = \frac{e^3}{12\pi^2} + O(e^5) \tag{18.2.37}$$

という値をとる. 真空偏極関数 $\pi(q^2)$ の 4 次の項の初期の計算[3a]を使って, ゲル・マンとローは $\beta(e)$ の e について次の次数の項も,

$$\beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2} + \frac{e^5}{64\pi^2} + O(e^7) \tag{18.2.38}$$

と求めた. 言い換えると, 変化するスケール μ での電荷はくりこみ群の方程式,

$$\mu \frac{d}{d\mu} e_\mu = \frac{e_\mu^3}{12\pi^2} + \frac{e_\mu^5}{64\pi^2} + O(e_\mu^7) \tag{18.2.39}$$

を満たす. これから, 小さな e_μ については μ が増加するにつれて e_μ は増加することがわかる.

初期条件も必要だ. これは通常のようにくりこまれた電荷 $e_R = Z_3^{1/2} e$ の知られている値 $\alpha \equiv e_R^2/4\pi = 1/137.036\ldots$ からわかる. (18.2.32) と (18.2.36) から,

$$\begin{aligned} e_R/e_\mu &= Z_3^{1/2} N_\mu^{(A)} = \sqrt{1-\pi(\mu^2)} \\ &= 1 - \frac{e_R^2}{4\pi^2} \int_0^1 dx\, x(1-x) \ln\left[1 + \frac{\mu^2 x(1-x)}{m_e^2}\right] + O(e_R^4) \end{aligned} \tag{18.2.40}$$

となる. これを (18.2.39) の解の μ での値と合わせる必要がある. この μ は (18.2.39) での近似 $\mu \gg m_e$ を正当化する程度に大きく, ただし, (18.2.40) の対数が $4\pi^2/e_R^2$ に比べて小さく摂動論が使える程度には小さくなければならない. (例えば, μ を 100 MeV 程度の大きさにとればよい.) μ がそのような値のとき, (18.2.40) は,

$$e_\mu \simeq e_R + \frac{e_R^3}{12\pi^2}\left[\ln\frac{\mu}{m_e} - \frac{5}{6}\right] \tag{18.2.41}$$

となる. 一方, e_μ が小さいとき, (18.2.39) の解は (右辺で主要な項のみを残して) 以下で与えられる.

$$e_\mu = \left[\text{定数} - \frac{\ln\mu}{6\pi^2}\right]^{-1/2} \tag{18.2.42}$$

(18.2.41) と (18.2.42) を比べると,

$$e_\mu = e_R\left[1 - \frac{e_R^2}{6\pi^2}\left(\ln\left(\frac{\mu}{m_e}\right) - \frac{5}{6}\right)\right]^{-1/2} \tag{18.2.43}$$

という解が求まる. (18.2.41) と異なり, (18.2.43) は $e_\mu^2/6\pi^2$ が小さい限り, $(e_R^2/6\pi^2)\ln(\mu/m_e)$ が小さいかどうかに依らず正しい.

例えば, 11.3 節でミューオンの磁気能率への主要な 4 次輻射補正項は 2 次の (シュウィンガー) 項 (11.3.16) に $k^2 \approx m_\mu^2$ での真空偏極関数 $\pi_e(k^2)$ をかけて得られることを既に見た. これは, (18.2.40) によれば (この次数では) シュウィンガー項の α の代りに $e_{m_\mu}^2/4\pi$ を使うことと同じだ.

別の例: CERN の LEP や SLAC の SLC での高エネルギー電子・陽電子衝突実験では, いまや Z^0 の質量の大きさ, すなわち 91 GeV 程度のエネルギーの過程での物理を調べている. (18.2.43) によれば, このようなエネルギーでは純粋の量子電磁理論の輻射補正は微細構造定数を $\alpha = 1/137.036$ ではなく,

$$\frac{e^2(91\,\mathrm{GeV})}{4\pi} = \frac{\alpha}{1-2(11.25)\alpha/3\pi} = \frac{1}{134.6} \tag{18.2.44}$$

として計算しなければならない. これは電子が m_Z より軽い唯一の荷電粒子であるような理論についてだ. 現実の世界ではそのような荷電粒子は多くあり, m_Z での有効微細構造定数[4] は $(128.87 \pm 0.12)^{-1}$ だ.

* * *

理論の結合定数を計算する浮動スケールは外線の運動量ではなく, 外場の値でもよい. コールマンとエリック・ワインバーグは時空に依存しないスカラーの外場 ϕ の有効ポテンシャル $V(\phi)$ を調べた.[4a] これはくりこみ群の応用としては初期のものだ. 場がそれ自身とのみ相互作用するという簡単な場合には, 彼らの 1 ループの結果は (16.2.15) で与えられる. このポテンシャルはくりこまれた質量 m_R がゼロとなる場合に特に興味深い. この場合, 1 ループの次数では, 最後の項の $\mu^2(\phi)$ を $g_R\phi^2/2$ に等しくとる. したがって, (16.2.15) は以下のように

なる. (結合定数 g は多少再定義した.)

$$V(\phi) = \lambda_R + \frac{g}{24}\phi^4 + \frac{g^2\phi^4 \ln \phi^2}{256\pi^2} . \tag{18.2.45}$$

これは, 一見すると $g > 0$ ではポテンシャルは ϕ が非常に小さいときに λ_R より小さく, $\phi = 0$ が極小値ではなく極大値であるように思える. しかし, ϕ がそのように小さいときには第 3 項は第 2 項より大きく, 摂動論が明らかに信頼できない. また, 場が大きいときにポテンシャルが下に有界であるためには, g は正であるとしたいが, (18.2.45) は g がいかに小さかろうと, ϕ が十分大きければ摂動論が成立せず, (18.2.45) が大きな場について下に有界かどうか分からない.

浮動スケール μ を場の大きさと定義した結合定数を使うとよりよい議論ができる. 結合定数 g_μ を以下の条件で決めるとしよう.

$$V(\mu) = \lambda_R + \frac{g_\mu}{24}\mu^4 . \tag{18.2.46}$$

もし, g_μ を当初から結合定数としていたら, (18.2.45) の代りに以下を得ていたはずだ.

$$V(\phi) = \lambda_R + \frac{g_\mu}{24}\phi^4 + \frac{g_\mu^2\phi^4}{256\pi^2}\ln\left(\frac{\phi^2}{\mu^2}\right) . \tag{18.2.47}$$

これは明らかに, (18.2.46) を満たす.* g_μ のくりこみ群方程式はこの

*(18.2.47) は (18.2.45) で単に (18.2.46) を使って g を g_μ で表わして得られるものとは, 最後の項が g^2 ではなく g_μ^2 である所が異なっている. この差は g の高次だが, $V(\phi)$ を μ とは非常に異なる ϕ で計算するときには, 大きな対数項が結合定数の冪に打ち勝つことで, 非常に重要となる. もし, 当初から g_μ を結合定数として扱い, μ を ϕ の大きさとしていたら, そのような大きな対数項は現れず, (18.2.47) の近似は g_μ が小さい限り有効だ.

有効ポテンシャルが μ に依存しないという条件から導かれる.**

$$\mu\frac{dg_\mu}{d\mu}=\frac{3g_\mu^2}{16\pi^2}\,. \tag{18.2.48}$$

(g_μ^2 の微分を含む項はここでは無視する. これはそれらが g_μ の高次であり, g_μ が十分に小さい限り無視できるからだ.) これがくりこみ群の方程式 (18.2.9), (18.2.12) と同じ形であることは偶然の一致ではない. そこでは μ はくりこみ運動量だった. これは次の節で見るようにくりこみ群の方程式の最初の 2 項は常に浮動スケールをどう定義するかには依らないことによる. この方程式の解は (18.2.17) で与えられて, 通常異なる積分定数 M を持つ. したがって, (18.2.17) で $\mu=\phi$ とすることにより,

$$V(\phi)=\lambda_R-\frac{4\pi^2\phi^4}{9\ln(\phi^2/M^2)}\,, \tag{18.2.49}$$

$$g_\phi=-\frac{32\pi^2}{3\ln(\phi^2/M^2)} \tag{18.2.50}$$

を得る.

この結果を使う際には多少注意が必要だ. それは結合定数 g_ϕ が小さいときにのみ適用可能だということだ. 問題は, (18.2.49) が ϕ が M に近いときに正しくなくなることだけではない. さらに, くりこみ群の方程式が特異点 $\phi=M$ を越えて積分できないために, g_ϕ を特異点の片側で知っていても反対側でその振舞いは一切分からないことだ.

もし, g_ϕ がある ϕ_0 において小さい正の値を持つことが分かったら, (18.2.50) から $M>|\phi_0|$ であることが分かる. したがって $|\phi|<|\phi_0|$ において g_ϕ は小さいままであり, (18.2.49) は正しい. これにより,

---

** 切断定数への依存性を全て消し去るには, ϕ をくりこまれた場 $\phi_\mu=N_\mu^\phi\phi$ で書かねばならない. こうすると $V(\phi_\mu)$ はくりこまれた定数場 N_μ^ϕ を通じて μ に依存する. ϕ^4 に比例する相互作用を持つスカラー場の理論では N_μ^ϕ の μ 依存性を与える最低次のダイアグラムは, 2 ループを持ち, ここでの計算の次数では $N_\mu^\phi=1$ とできるので, この点はここでは無視する.

(18.2.45) から思われたのとは異なり, $\phi = 0$ の点は $V(\phi)$ の極小値であることが分かる. これは対称性変換 $\phi \to -\phi$ のもとで不変な真空はこの模型では, 量子論的な障壁通過の可能性を除いては, 安定なことを意味する. 一方, $|\phi|$ が M より十分に大きいときには (18.2.49) が適切かどうかは分からない. 全ての $|\phi| > M$ で結合定数は大きすぎて摂動論は使えないかもしれない. また, 結合定数がある $|\phi| > M$ で小さくなっても, そのような ϕ ではポテンシャルは (18.2.49) でくりこみのスケールを $M' > \phi$ と取ったもので与えられ, 第二の特異性が現れるかもしれない. したがって, この場合には $|\phi| \to \infty$ において $V(\phi) \to -\infty$ であるとは結論できない.

同様に, もし g_ϕ がある ϕ_0 で小さい負の値をとれば, $M < |\phi_0|$ であることが分かる. したがって $|\phi| > |\phi_0|$ では g_ϕ は小さいままであり, (18.2.49) が適用できる. この場合には $|\phi| < M$ でのポテンシャルの振舞いについては何ら結論を出せない. しかし, ここでは (18.2.49) を使うことができ $|\phi| \to \infty$ において $V(\phi) \to -\infty$ であり, 安定な真空が存在し得ないことが分かる. ここでは $|\phi| \to \infty$ の極限を考察しているので, この結論は質量が $m > 0$ のスカラー場についても, $m \ll |\phi_0|$ である限り成り立つ. これが ϕ^4 の (スカラー場の質量より十分大きいスケールでくりこまれた) 結合定数が正だと仮定する理由だ.

18.3 各種の漸近的振舞い

くりこみ群の方法を使うと, 場の量子論でどのような漸近的な振舞いが可能か, 変化する結合定数 g_μ が摂動論が使えるほどに小さくはない場合にでも, 洞察を得ることができる. 結合定数が一つしかない理論では, 関数 $\beta(g)$ の 4 つの異なる形に対応して, g_μ の $\mu \to \infty$ での振舞いを 4 つに分類することができる. 独立な結合定数が複数ある理論は次の節で扱う.

前の節で考察した二つの例での $\beta(g)$ の結果についてまず考える．それらの一つはスカラー場が $g\phi^4/24$ の相互作用を持つ理論であり，g が小さいときのベータ関数は，

$$\beta(g) = \frac{3g^2}{16\pi^2} - \frac{17}{3}\frac{g^3}{(16\pi^2)^2} + O(g^4) \tag{18.3.1}$$

となっている．もう一つは量子電磁理論だ．この場合にベータ関数を (18.2.38) の形に書く代りに，

$$g \equiv e^2 \tag{18.3.2}$$

と書き，$\beta(g_\mu)$ は $\mu\, dg_\mu/d\mu$ としてこの理論とスカラー場の理論との類似性を強調することにする．こうすると g が小さいとき，

$$\begin{aligned}\beta(g) &= 2e\left[\frac{e^3}{12\pi^2} + \frac{e^5}{64\pi^2} + O(e^7)\right]\\ &= \frac{g^2}{6\pi^2} + \frac{g^3}{32\pi^2} + O(g^4)\end{aligned} \tag{18.3.3}$$

となる．これら二つの場合は共に，物理的に許される結合定数は $g \geq 0$ の領域だ．量子電磁力学では，これは単にラグランジアンが実数であるために e は実数でなければならないことによる．スカラー場の理論では，前の節の終わりで見たように安定な真空状態が存在するためには $g > 0$ が必要だ．そこでは g が小さい限り $\beta(g) \geq 0$ となっていることは注目に値する．しかしながら，$g \geq 0$ で $\beta(g) \leq 0$ となる例もある．例えば，スカラー場の理論で相互作用ハミルトニアンが g を正として $-g\phi^4/24$ である例を考える．これは物理的でないかもしれないが，摂動論だけを使う限り，安定性は問題とならない．(18.2.9) によれば，もし $g \to -g$ と再定義すれば，ベータ関数は $\beta(g) \to -\beta(-g)$ と変化し，相互作用 $g\phi^4/24$ については $\beta(g) = 3g^2/16\pi^2 + O(g^3)$ となった前の結果から，相互作用ハミルトニアン密度が $-g\phi^4/24$ である理論においては，

$$\beta(g) = -3g^2/16\pi^2 + O(g^3) \tag{18.3.4}$$

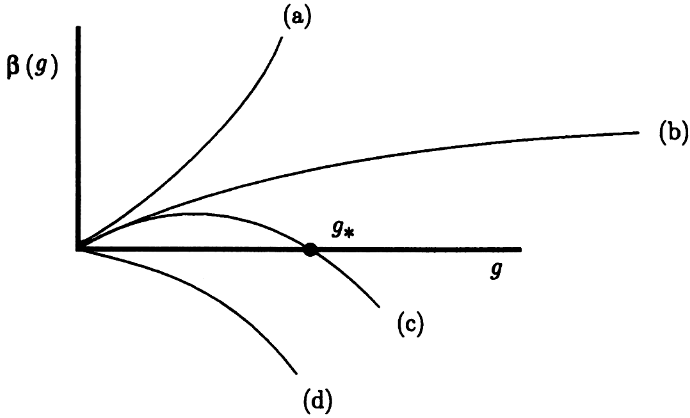


図 18.4: 関数 $\beta(g)$ の可能な 4 種の形. $\beta(g)$ がこのような形の場合, 変化する結合定数 g_μ は, (a) では有限な μ で無限大に近づき, (b) では μ が増加するにつれて増加し, (c) では $\mu \to \infty$ で有限の極限 g_* に近き, (d) では $\mu \to \infty$ でゼロに近づく.

を得る. より物理にとって重要なのは, 18.7 節で見るように, スピノル場をあまり多く持たない非可換ゲージ理論では, 結合定数が正で小さいときに $\beta \leq 0$ となることだ. 以下では, 常に結合定数 g を $g \geq 0$ となるように定義して, g が小さいときに $\beta(g)$ が正や負の場合を考える.

さて, 可能性を一つずつ見ていこう. (図 18.4 を見よ.)

(a) 有限のエネルギーでの特異性

いま g が正で小さいときに $\beta(g) > 0$ となっているとする. ((18.3.1) と (18.3.3) の場合がそうだ.) また, g が増加するにつれて $\beta(g)$ は正のまま十分に早く増加して, 積分 $\int^\infty dg/\beta(g)$ は収束するとする. つまり,

$$\int^\infty \frac{dg}{\beta(g)} < \infty . \tag{18.3.5}$$

このとき g_μ は $g_\mu=0$ から単調に離れていき, (18.2.10) によれば, g_E は有限の E,

$$E_\infty=\mu\exp\left(\int_{g_\mu}^{\infty}\frac{dg}{\beta(g)}\right) \tag{18.3.6}$$

において無限大となる. ここで μ は $\mu\gg m$ を満たす任意のくりこみスケールだ. この現象の例は前の節で見た. もしスカラー場のベータ関数の最低次の式 $\beta(g)=3g^2/16\pi^2$ が g の全ての値で厳密に正しいとすると, 変化する結合定数 (18.2.17) は (18.2.19) のエネルギーで無限大となる. 同様に, スピノル量子電磁理論のベータ関数の最低次の式 $\beta(g)=g^2/6\pi^2$ ($g\equiv e^2$ とする) が g の全ての値において厳密に正しいとすると, g_E と e_E が無限大となるエネルギー (18.3.6) は,

$$E_\infty=\mu\exp(6\pi^2/g_\mu) \tag{18.3.7}$$

となる. (18.2.43) を使うと, これを通常のくりこまれた電荷で次のように表わせる.

$$E_\infty\simeq m_e\exp\left(\frac{6\pi^2}{e_R^2}+\frac{5}{6}+O(e_R^2)\right)=e^{646.6}m_e\,. \tag{18.3.8}$$

もちろん, $\beta(g)=g^2/6\pi^2$ という近似はこのエネルギーに到達する前に駄目になるので, 自信を持って言えるのは E_∞ より低いあるエネルギー E で e_E は大きくなりすぎて摂動論は使えなくなるということだけだ.

(b) 継続する単調増大

さて, ある理論において $g\to\infty$ で $\beta(g)$ が正で有限だが, ゆっくり増大 (または減少) するために $\int^\infty dg/\beta(g)$ が発散するとする. このとき, 結合定数 g_E は $E\to\infty$ で増大しつづけ, $E=\infty$ でのみ無限大となる. さらに, $E\to\infty$ での g_E の漸近的振舞いの主要項は, 通常のようにくりこまれた結合定数に依存しない. 例えば, もし g が大きいと

き $\beta(g)$ が, $b>0$, $k<1$ として, bg^k のように振る舞うとする. すると, (18.2.9) の解は以下となる.

$$g_E = \left[1+(1-k)b\,g_\mu^{k-1}\ln\frac{E}{\mu}\right]^{1/(1-k)} g_\mu\,. \tag{18.3.9}$$

もし, ある (例えば m の大きさの) μ について g_μ が小さいとすると, この μ より指数関数的に大きなエネルギーでのみ g_E の増大が見られる. しかし, 極端に大きなエネルギーの極限では結合定数は以下に従って増大する.

$$g_E \to \left[(1-k)b\ln E\right]^{1/(1-k)}\ . \tag{18.3.10}$$

この極限の振舞いは g_μ に依存しない!

(c) 有限の結合定数での固定点

次に $0<g<g_*$ において $\beta(g)$ が正だが, $g=g_*$ においてゼロとない, それ以降は負だとする. このとき (18.2.9) によれば, μ が増大するにつれて g_μ は $g_\mu<g_*$ のときに増大し, $g_\mu>g_*$ で減少する. どちらの場合も $\mu\to\infty$ で固定点 g_* に近づく. $\beta(g)$ の g_* でのゼロ点が単純ならば, この点の近傍で, $a>0$ として,

$$\beta(g)\to a\,(g_*-g)\quad \text{for}\quad g\to g_* \tag{18.3.11}$$

となる. このとき (18.2.9) の解は,

$$g_*-g_\mu \propto \mu^{-a} \tag{18.3.12}$$

で与えられる. (上で述べた (b) の種類の振舞いは固定点 g_* が無限大だという特別な場合と見なすことができる.) また, 一般の演算子 $\mathcal{O}$ の $\gamma(g)$ は g_* の近傍で滑らかに振舞うと考えられる.

$$\gamma(g)=\gamma(g_*)+c(g_*-g)+O\left((g_*-g)^2\right)\ . \tag{18.3.13}$$

(ここで γ と c の添字 $\mathcal{O}$ を省略した.) したがって, この (それに多分他の) 演算子の行列要素において, 以下の因子が生じる ((18.2.27) を見よ).

$$N_E^{-1} \propto \exp\left[-\int^E \gamma(g_\mu)\,\frac{d\mu}{\mu}\right] \propto E^{-\gamma(g_*)}\left[1+O(E^{-a})\right]\,. \quad (18.3.14)$$

$E^{-\gamma(g_*)}$ の因子の積を (18.2.23) の E^D の因子とまとめると, 全行列要素が,

$$M_R \propto E^{D_*} \quad (18.3.15)$$

と振舞うという結果が得られる. ここで, 次元 D_* は行列要素に現れる各演算子の実際の次元に**異常次元** (anomalous dimension) $-\gamma(g_*)$ を加えて得られるものだ.

(d) 漸近的自由性

いままでに論じた例では, g が正で小さいときには $\beta(g)$ は正であった. このため, μ が増大するにつれ g_μ は $g=0$ から遠ざかった. ある他の理論で, g が正で小さいときに $\beta(g)$ が負であるとする. このとき, n を $\beta(g)$ に寄与する最低次のダイアグラムの次数とすると, $b>0$ として,

$$\beta(g) \to -\,b\,g^n \quad (18.3.16)$$

と表わされる. n は常に 1 より大きな整数だ. (ここで例として挙げた理論では $n=2$ となっている.) (18.2.9) の解は,

$$g_E = g_\mu\left[1+b(n-1)g_\mu^{n-1}\ln\,\frac{E}{\mu}\right]^{-1/(n-1)} \quad (18.3.17)$$

となる. $E\to\infty$ では, これは g_μ に依存しない極限値,

$$g_E \to \left[b(n-1)\ln\,E\right]^{-1/(n-1)} \quad (18.3.18)$$

を持つ. これによれば, $E \to \infty$ において g_E はゼロとなる. したがって, ある有限の E における g_E が, g と $\beta(g)$ が反対符号を持つ $g=0$ の近くの領域にある限り, この極限で摂動論が信頼できる. 種々の演算子 $\mathcal{O}$ の異常次元 $\gamma^{(\mathcal{O})}$ は以下の弱結合の振舞いをすると考えられる. (以下で $\mathcal{O}$ の添字は落としている.)

$$\gamma(g) \to c\, g^m\ . \tag{18.3.19}$$

ここで m はその演算子のくりこみに寄与する最低次のダイアグラムの次数だ. また, 定数 c は正のことも負のこともありえる. したがって, この演算子のくりこみによって行列要素に導入された因子の高エネルギーでの漸近的振舞いは,

$$\begin{aligned} N_E^{-1} &\propto \exp\left[-\int^E \gamma(g_\mu)\frac{d\mu}{\mu}\right] \\ &\to \exp\left[-c\int^E [b(n-1)\ln\mu]^{-m/(n-1)}\,\frac{d\mu}{\mu}\right] \\ &\propto \exp\left[-\frac{c[b(n-1)]^{-m/(n-1)}}{(1-m/(n-1))}(\ln\, E)^{1-m/(n-1)}\right] \end{aligned} \tag{18.3.20}$$

となる. ただし, $m=n-1$ の場合だけは以下のように振舞う.

$$N_E^{-1} \propto (\ln\, E)^{-c/b(n-1)}\, . \tag{18.3.21}$$

このように, 漸近的自由の場合には, 行列要素の漸近的振舞いのエネルギーの冪を決める有効次元への補正が現れるのではなく, 漸近的振舞いが $\ln\, E$ の冪の補正を受けることがわかる.

漸近的自由な模型の簡単なものとしては, g を正として $-g\phi^4/24$ の相互作用ハミルトニアン密度を持つスカラー場の理論を考えることができる. (18.3.4) によれば, (18.3.16) のパラメータは,

$$b = 3/16\pi^2\ , \qquad n=2 \tag{18.3.22}$$

と与えられるから, (18.3.17) から $E \to \infty$ において,

$$g_E \to \left[\frac{3\ln E}{16\pi^2}\right]^{-1} \tag{18.3.23}$$

となる. また, この理論では演算子 ϕ^2 は (18.2.29) で決まる,

$$\gamma(g) = -\frac{g}{16\pi^2} + O(g^2) \tag{18.3.24}$$

の異常次元を持つ. したがって, (18.3.19) が使えて,

$$c = -1/16\pi^2\,, \qquad m = 1 \tag{18.3.25}$$

となる. 行列要素の各 ϕ^2 演算子は (18.3.21) で決められる因子,

$$N_E^{-1} \propto (\ln\,E)^{1/3} \tag{18.3.26}$$

の寄与をする. この理論ではスカラー場 ϕ 自身は $\gamma(g) \propto g^2$ であり, したがって $m = 2$ だ. これより, 行列要素の中の各 ϕ 演算子は (18.3.20) で決められる因子,

$$N_E^{-1} \propto 1 + O\left(\frac{1}{\ln\,E}\right) \tag{18.3.27}$$

の寄与をする. 18.7 節では量子電磁理論を扱い, 上と異なるより物理的な漸近的自由性の例を見る.

g_E が無限大のエネルギーまで求められる全ての例では, その極限での振舞いはくりこまれた結合定数 g_R に依存しないことがわかった. しかし, これは必ずしも理論に任意の無次元パラメータが存在しないことを意味しない. 全ての場合で, g_E が $E \to \infty$ の極限でどう振舞うかを表わすためには, エネルギーの次元を持つ自由なパラメータ λ を決めなければならない. (b) の場合には (18.3.10) は以下のように書くことができる.

$$g_E \to [(1-k)b\,\ln(E/\lambda)]^{1/(1-k)}\,.$$

(c) の場合には, (18.3.12) は以下のように書くことができる.

$$g_E \to g_* \left[1-\left(\frac{\lambda}{E}\right)^a\right] .$$

最後に, (d) の場合には (18.3.18) は以下のように書くことができる.

$$g_E \to [b(n-1)\ln(E/\lambda)]^{-1/(n-1)} .$$

このような理論は一般に, λ と m の比という自由な無次元パラメータを持つ. e_R のような m の大きさでくりこまれる結合定数は, m/λ の関数として表わされる. 理論の全ての質量がゼロとなるときにのみ, 理論には自由な無次元パラメータが無いと言える.

ここで述べた4種類の漸近的な振舞いのうち, (a) と (b) では有限のエネルギー ((a) の場合) か $E \to \infty$ ((b) の場合) で変化する結合定数 g_E が無限大になるという明らかに非物理的な結果をもたらす. これ自身は困難を意味するわけではない. それを調べるには結合定数がどのように定義されているかを見なければならない. 例えば, g_μ が $\mu = m$ で有限の値 g_m をとり, $\mu \to \infty$ のときに滑らかにゼロになるとする. 新しい結合定数を $\tilde{g}_\mu \equiv g_\mu/[1-g_\mu/g_{2m}]$ と定義すれば, $\tilde{g}_\mu$ は $\mu = 2m$ で無限大となる. しかし, これはこの結合パラメータを選んだ特定の仕方のせいだ. 通常のくりこみをした結合定数 g_μ は, ϕ^4 のスカラー場の理論でも量子電磁理論でも μ の大きさのエネルギーでの行列要素の値を使って定義した. 特に, ϕ^4 スカラー場の理論の g_μ はスカラー・スカラー散乱の不変ファインマン振幅 A の $s = t = u = \mu^2$ での値と定義した. しかし, そこでは 振幅 A は解析的なはずだ. また, スピノル電磁理論での $g_\mu = e_\mu^2$ は

$$e_\mu^2/e_R^2 = Z_3 \Big/ N_\mu^{(A)2} = \left[1-\pi(\mu^2)\right]^{-1} \qquad (18.3.28)$$

で定義した. e_μ^2 が μ_∞ で無限大だということは, p^2 の正の値, つまり $p^2 = \mu_\infty^2$ で, くりこまれた光子のプロパゲーターに極か他の特異性を

生じさせる. しかし, そこではプロパゲーターは解析的なはずだ. したがって, g_μ をここで定義したようにとったとき, (a) の場合は物理的に排除される.

ならば, 種々の場の量子論はどのように振舞うのだろうか？かつて, ランダウ[4b]は, 量子電磁理論では摂動論の各次数で増大していく $\ln(E/M)$ の冪について和をとると, 有限の E で特異性 (いわゆるランダウ・ゴースト (Landau ghost)) が生じると論じた. 現代的な言葉では, ランダウは上の (a) の可能性を発見したとも言える. しかし, 彼は (b) や (c) の場合を否定するような議論は与えなかった.

しかしながら, 今日では, 量子電磁理論や ϕ^4 相互作用をもつスカラー場の理論のような漸近的自由ではない場の量子論は数学的に矛盾していると広く考えられるようになっている. 量子電磁理論では (c), つまり有限の固定点 e_* の存在に対してはある反証が存在する. そのような固定点が可能なのは[4c], 非摂動論的効果が 20 章で述べる演算子積展開の定性的な性質を変えるか, 22 章で述べる 3 角アノマリーに非摂動論的くりこみがあるかの場合に限られる. しかし, たとえ (c) の場合が量子電磁理論で実際に排除されても, (b) の結合定数に無限大の固定点がある可能性が残されている.

相互作用があり漸近的自由でない場の量子論が矛盾を内包するという証拠は, 4 次元時空で ϕ^4 相互作用をするスカラー場を有限な時空の格子上で量子化した理論の研究から来ている. この理論 (理論のパラメータと格子間隔とは特に関係させない) は格子間隔をゼロにする極限で, 漸近的に自由でない限り, 相互作用する連続理論にならないという厳密な定理が存在する.[4d] これはもちろん摂動論で導かれた結果に反する. この議論はまた, 確定的であるようにも思えない. 漸近的自由でない連続スカラー場の理論が矛盾なく存在すれば, 時空格子上の点を除く全ての点でのスカラー場の値を積分することによって格子上の理論を作ることは可能だろう. しかし,

それはこれらの定理で考察された格子理論とは異なるだろう. それは対称性で許される相互作用を全て含み, ϕ^4 だけではなく, ϕ^6, $\phi^3\Box\phi$ 等々の項もあるだろう. その係数は 12.4 節で論じたウィルソンのくりこみ群方程式に従う切断定数 (格子間隔の逆数) 依存性を持つ. この様な理論の連続極限については誰も何も証明していない.

もし, 格子間隔がゼロの極限で相互作用するスカラー場の連続理論が本当に存在しないならば, ウィルソンのくりこみ群方程式を解く際に障害に出会うはずだ. その障害は, くりこまれた結合定数が小さいときには, 格子間隔が非常に小さいときに生じるだろう. そのような理論は非常に小さな時空間隔で見ない限り, 相互作用する連続場の理論のように見えるはずだ. この近似的な連続理論のくりこまれた結合定数は上の (a) の場合のように有限なエネルギーで特異性を持ち, 短距離で成立しなくなる. (しかし, 強結合ではウィルソンのくりこみ群方程式とゲルマン・ローのくりこみ群方程式との間に直接の関係はなく, 有限の格子間隔での裸の結合定数の特異性は必ずしも有限のくりこみスケールでのくりこまれた結合定数の特異性を意味しない.)

この種の理論は時に**自明** (trivial) だと言われる. これは, 格子上で量子化された理論の裸の結合定数についての種々の仮定のもとで連続極限が自由場の理論になるためか, または, どのエネルギーでも満足のいく (a) の種類の連続理論を構成する唯一の方法はくりこみ群方程式 (18.2.9) の解として $g_\mu = 0$ を採用するしかないためだ. もし場の理論がどちらかの意味で自明としても, それを物理現象の現実的な理論の一部として含めてはいけない理由は無い. ある場の理論のウィルソンのくりこみ群の方程式の解に非常に小さい格子間隔で障害があっても, もし現実世界でそのような短距離では他の場も考慮に入れなければならないならば, その障害は重要ではない. 同様に, ある与えられた場の量子論がある大きなエネルギー E_∞ で非物理的な特異性を持っていても, もし問題の理論がある大きな理論の E_∞ よりはるかに

低いエネルギーでのみ正しい近似にしか過ぎないのなら, その特異性は物理的には問題とならない. 特に, 量子電磁理論が特異になると思われる (18.3.8) のエネルギーに到達するはるか以前に重力さえも考慮に入れる必要が生じるが, そのようなエネルギーでの強い重力の影響を計算する方法は誰も知らない.

このような議論にも関わらず, 非物理的な特異性を避けるために, スピノル量子電磁理論のような別々の場の量子論はやがて一つの漸近的自由な理論に統一されると考えることもできる. 幸運なことに, ある理論が結合定数のある有限の範囲で漸近的自由かどうかという問題は, 摂動論で調べることができる. もし, $g \to 0+$ で $\beta(g)$ が負ならば, その理論はくりこまれた結合定数 g_μ がゼロと $\beta(g)$ の最初のゼロの間にあるとき漸近的自由だ.

* * *

これに関連して, $\beta(g)$ の詳細な形はゲージ条件と変化する結合定数が正確にどのように定義されているかとに依存するが, $\beta(g)$ の冪展開の最初の 2 項はそれに依存しないことに注意しておくと有益だ. 例えば, 変化する結合定数に g_μ と $\tilde{g}_\mu$ という二つの定義があるとする. これらはおそらく異なるくりこみのスケール μ で定義したか, ゲージが異なるかだ. g_μ と $\tilde{g}_\mu$ はともに無次元で切断定数に依存しないから, $\mu \gg m$ で $\tilde{g}_\mu$ が g_μ 以外に依存することは不可能だ.

$$\tilde{g}_\mu = \tilde{g}(g_\mu)\,.$$

そうすると,

$$\tilde{\beta}(\tilde{g}_\mu) \equiv \mu \frac{d}{d\mu}\,\tilde{g}_\mu = \frac{d\tilde{g}(g_\mu)}{dg_\mu}\,\beta(g_\mu)$$

となるから,

$$\tilde{\beta}(\tilde{g}) = \frac{d\tilde{g}(g)}{dg}\,\beta(g) \tag{18.3.29}$$

を得る. くりこまれていない結合定数の定義を同じに保つ限り, 全てのくりこまれた結合定数は最低次で同じ大きさだから, $\tilde{g}$ の g での冪展開は,

$$\tilde{g}(g) = g + a\,g^2 + O(g^3)$$

となる. これは, 以下と同等だ.

$$g = \tilde{g} - a\,\tilde{g}^2 + O(\tilde{g}^3)\,.$$

その微分は,

$$\frac{d\tilde{g}}{dg} = 1 + 2\,a\,g\, + O(g^2) = 1 + 2\,a\,\tilde{g} + O(\tilde{g}^2)$$

となる. また, ここで考えている結合定数 ($g = e^2$ を含む) については, $\beta(g)$ の冪展開は,

$$\beta(g) = b\,g^2 + b'g^3 + O(g^4)$$

という形をとる. これは, $\tilde{g}$ を使って表わすと, 以下のようになる.

$$\beta(g) = b\tilde{g}^2 + (b' - 2ab)\,\tilde{g}^3 + O(\tilde{g}^4)\,.$$

したがって, (18.3.29) より以下を得る.

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}(\tilde{g}) &= \left[1 + 2a\,\tilde{g} + O(\tilde{g}^2)\right]\left[b\tilde{g}^2 + (b' - 2ab)\tilde{g}^3 + O(\tilde{g}^4)\right] \\ &= b\tilde{g}^2 + b'\tilde{g}^3 + O(\tilde{g}^4)\,. \end{aligned} \tag{18.3.30}$$

これより, $\tilde{\beta}$ の $\tilde{g}$ についての冪展開の最初の 2 項はβ の g についての冪展開と同じ係数であることが分かる. しかし, これは高次については明らかに成り立たない. 実際, $\tilde{\beta}(\tilde{g})$ の $\tilde{g}$ について 4 次以上の高次項全てがゼロとなるように関数 $\tilde{g}(g)$ を選ぶことも可能だ. そうすると, $\beta(g)$ の摂動級数の最初の 2 項を調べることで $E \to \infty$ での $\tilde{g}_E$ の漸近的振舞いが分かる. しかし, これはほとんど役に立たない. それは,

g がどのように $\tilde{g}$ に依存するかを調べるためには全ての次数で計算をする必要があるからだ．それ無しでは，$\tilde{g}$ の漸近的振舞いの知識を使って，g や物理量の漸近的振舞いについて何も言うことができない．

(18.3.30) を導いたのと同じ議論から，結合定数が小さいとき格子間隔の関数としての裸の結合定数についてのウィルソンのくりこみ群方程式は，格子間隔の逆数が粒子の質量より大きいときに，くりこみスケールの関数としてのくりこまれた結合定数に対するゲルマン・ローのくりこみ群方程式でくりこみスケールが粒子の質量より大きいときのものと同じになることが示せる．したがって，連続理論が漸近的に自由ならば，格子上で量子化された理論の連続極限を取るのになんら障害は無い．

18.4　複数の結合定数と質量の影響

いままでは無次元の結合定数 g を一つだけ持つ理論を考えてきた．この形式を結合定数 g^ℓ が複数ある場合に拡張するのは簡単だ．この場合，各 g^ℓ についてくりこみ群方程式があり，$\mu \gg m$ では以下の形をとる．

$$\mu \frac{d}{d\mu} g^\ell(\mu) = \beta^\ell(g(\mu))\,. \tag{18.4.1}$$

ここで各 β^ℓ は全ての g に依存する．$\mu \to \infty$ での $g^\ell(\mu)$ の漸近的振舞いについては非常に多くの可能性がある．ある与えられた理論では，μ が有限か無限大になるときに，g 空間で無限大に行く軌跡，固定点に近づく軌跡，また，リミット・サイクル (limit cycle) と呼ばれる閉曲線に近づく軌跡が存在し得る．これらの種々の可能性について感触を得るために，固定点の近くでの $g^\ell(\mu)$ の振舞いを調べよう．

もし，

$$\beta^\ell(g_*) = 0 \tag{18.4.2}$$

ならば, (18.4.1) は固定点解 $g^\ell(\mu) = g^\ell_*$ を持つ. この点の近傍では, (18.4.1) は以下となる.

$$\mu \frac{d}{d\mu} \left[g^\ell(\mu) - g^\ell_*\right] = \sum_k M^\ell{}_k \left[g^k(\mu) - g^k_*\right] . \tag{18.4.3}$$

ここで M は行列,

$$M^\ell{}_k \equiv \left[\frac{\partial \beta^\ell(g)}{\partial g^k}\right]_{g=g_*} \tag{18.4.4}$$

だ. 上の解はこの行列の固有値を使って以下のように展開できる.

$$g^\ell(\mu) = g^\ell_* + \sum_m c_m V_m{}^\ell \mu^{\lambda_m} . \tag{18.4.5}$$

ここで V_m は M の固有ベクトルで, その固有値を λ_m とした. (その規格化は都合の良いものをとればよい.)

$$\sum_k M^\ell{}_k V_m{}^k = \lambda_m V_m{}^\ell . \tag{18.4.6}$$

そして c_m は展開係数だ.* (この章では和の規約は使わないことにする.)

(18.4.5) によれば, $\lambda_m > 0$ の固有ベクトル全てについて $c_m = 0$ であれば, またそのときにのみ, $\mu \to \infty$ において結合定数が固定点に近づくことがわかる. (単純のためにここではどの固有値もゼロでないと仮定している.) したがって, M の負の固有値の数を N_- とすると, 一般的に固定点に引き寄せられる軌跡は N_- 次元表面上にある. この表面の g_* での接線は負の固有値を持つ固有ベクトルだ. この表面上にない軌跡は固定点の近くまで近づくかもしれないが, やがて主に

*ここで固有ベクトル V_m は完全系をなすと仮定している. これは常に成立はしないが, 一般的に起こることではある. 有限次の行列 M については, 永年方程式 (secular equation) $\mathrm{Det}\,(M - \lambda 1) = 0$ の根が全て異なれば, その固有ベクトルは完全系をなす. 固有ベクトルが完全系をなさない行列は, 固有ベクトルが完全系をなす行列でその固有値の幾つかが縮退した極限と見ることができる.

正で最大の固有値の方向へと反発して行く. もちろん, 全ての固有値が負ならば, 固定点の近くの有限の領域内で全ての軌跡がこの点に集まる.

固有値 λ_m は明らかに固定点に近づく軌跡の漸近的な振舞いを調べる上で重要であるので, これらの固有値は結合定数の定義に依らないということは注意しておく必要がある. 例えば, g の関数として定義された新たな結合定数の組 $\tilde{g}^\ell$ を導入したとする. これらは, 以下のくりこみ群方程式を満たす.

$$\mu \frac{d}{d\mu} \tilde{g}^\ell(\mu) = \sum_m \left. \frac{\partial \tilde{g}^\ell(g)}{\partial g^m} \right|_{g=g(\mu)} \beta^m(g(\mu)) \equiv \tilde{\beta}^\ell(\tilde{g}(\mu)) .$$

したがって,

$$\tilde{\beta}^\ell(\tilde{g}) = \sum_m \frac{\partial \tilde{g}^\ell(g)}{\partial g^m} \beta^m(g) \tag{18.4.7}$$

となる. (つまり, β は結合定数空間で反変ベクトルとして変換する.) これを微分すると,

$$\sum_m \frac{\partial \tilde{\beta}^\ell(\tilde{g})}{\partial \tilde{g}^m} \frac{\partial \tilde{g}^m}{\partial g^k} = \sum_m \frac{\partial^2 \tilde{g}^\ell}{\partial g^m \partial g^k} \beta^m(g) + \sum_m \frac{\partial \tilde{g}^\ell}{\partial g^m} \frac{\partial \beta^m(g)}{\partial g^k}$$

を得る. 固定点 g_* では右辺の第一項はゼロとなり, 以下の行列の表式を得る.

$$\tilde{M} S = S M . \tag{18.4.8}$$

ここで,

$$\tilde{M}^\ell{}_k \equiv \left[\frac{\partial \tilde{\beta}^\ell}{\partial \tilde{g}^k} \right]_{\tilde{g}=\tilde{g}(g_*)} , \tag{18.4.9}$$

$$S^\ell{}_k \equiv \left[\frac{\partial \tilde{g}^\ell}{\partial g^k} \right]_{g=g_*} \tag{18.4.10}$$

と定義した. 変換 $g \to \tilde{g}$ が特異でない限り, (18.4.8) は相似変換だから, M と $\tilde{M}$ は同じ固有値 λ_m を持つ.

くりこみ群の形式はくりこみ可能な理論だけではなく，非くりこみ可能な理論にも拡張して適用できる．12.3節で述べたように，非くりこみ可能な理論の無限大は，くりこみ可能な理論と同じように結合定数や質量を適切にくりこむことによって消去することができる．ただ，違いは非くりこみ可能な理論ではラグランジアンは理論の対称性で許される全ての相互作用を含まなければならないことだ．もし，g_B^ℓ がラグランジアンの中の次元 D_ℓ の演算子 (つまり場と場の微分の積で，その次元が質量やエネルギーの冪で D_ℓ のもの) にかかる非くりこみ可能な結合定数ならば，g_B^ℓ の次元は $\Delta_\ell = 4 - D_\ell$ だ．このとき，裸の結合定数を無次元のくりこまれた結合定数 $g^\ell(\mu)$ と切断定数 Λ とを使って以下のような一般的な形で表わすことができる．

$$g_B^\ell \equiv \mu^{\Delta_\ell}\left[g^\ell(\mu) + \sum_{k,m} b^\ell{}_{km}\, g^k(\mu) g^m(\mu) \ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) + O(g(\mu)^3)\right] . \tag{18.4.11}$$

ここで，$b^\ell{}_{km}$ は無次元の数係数であり，高次の同様な係数も物理量が切断定数に依存しないように選ばれている．(理論によっては，主要項が結合定数について3次かもっと高次であることもある．その場合の変更は明らかだ．) g_B が切断定数に依存しないという条件から，くりこみ群方程式 (18.4.1) を得る．ここで，

$$\beta^\ell(g) = -\Delta_\ell g^\ell - \sum_{k,m} b^\ell_{km} g^k g^m + O(g^3) \tag{18.4.12}$$

となっている．非くりこみ可能相互作用は $D_\ell > 4$，つまり $\Delta_\ell < 0$ のものだから，全ての $g^\ell(\mu)$ が十分小さい限り，非くりこみ可能な結合定数について β^ℓ は正であり，その結合定数は μ とともに増大する．しかし，結合定数が大きくなりすぎて摂動論が使えなくなったときに何が起こるかは誰も知らない．

しかし，次の節で説明するように，無限個の独立なパラメータを持つ理論でさえ固定点 g_* を持ち，そこで行列 (18.4.6) の負の固有値の数

N_- が結合定数がゼロのところと同じように有限となっている場合が多い. (特に, しばしば, $N_- = 1$ となっている.) $N_- \neq 0$ ならば, 固定点は $\mu \to \infty$ でその固定点に引き寄せられる軌跡の集合からなる N_- 次元の臨界面上にある. 非くりこみ可能な理論で固定点がそのような臨界面にあるときには, もちろん漸近的自由ではないが, **漸近的安全** (asymptotically safe)[5] だという. これはくりこまれた結合定数が μ が大きいときに有限にとどまるからだ. そのような理論では漸近的安全性の条件は, 自由なパラメータのうち臨界面の座標からなる有限個以外は消されてしまうという意味で, くりこみ可能性の原理と同じ役割を果たす.

くりこみ可能な理論では, 有限個の裸の結合定数の切断定数に対する依存性を調節することにより, 全ての物理量が切断定数に依存しないようにできる. これらの裸の結合定数は同じ数の μ に依存するくりこまれた結合定数で表わされる. 裸の結合定数が μ に依存しない条件は, くりこまれた結合定数の間のみを関係付けるくりこみ群方程式を与える. くりこみ可能な結合のみならず非くりこみ可能な結合をも許すという広い観点から見ると, くりこみ可能な理論は全てのくりこみ可能な理論や非くりこみ可能な理論のなす無限次元空間の中の単に有限次元**不変表面** (invariant surface) に対応している. その不変表面とは, その表面上の任意の点 g で $\beta^\ell(g)$ がその点の表面に接しているものだ.

この節でいままでは暗黙の内に $\mu \gg m$ と仮定して, β^ℓ の m/μ 依存性を無視してきた. しかしこれは必要無い. もし欲すれば, 質量も単に一つの結合定数として扱える.[6] つまり, 全てのくりこまれた結合定数は前と同じように μ の大きさの質量殻外の運動量での種々のグリーン関数の値を使って定義するが, そのとき, 全ての裸の質量をゼロにとればよい. ディラック場 ψ とスカラー場 ϕ の無次元のくりこ

まれた質量パラメータは, 以下で定義できる.

$$m_\psi(\mu) \equiv N^{(\bar\psi\psi)}(\Lambda/\mu)^{-1}\, m_{\psi,\text{BARE}}(\Lambda)/\mu\ , \tag{18.4.13}$$

$$m_\phi^2(\mu) \equiv N^{(\phi^2)}(\Lambda/\mu)^{-1}\, m^2_{\phi,\text{BARE}}(\Lambda)/\mu^2\ . \tag{18.4.14}$$

ここで, $N^{(\mathcal{O})}(\Lambda/\mu)$ は無次元定数であり, 対応する演算子 $\mathcal{O}$ にかけると, 全ての裸の質量をゼロとして計算したこれらの演算子の行列要素の無限大を打ち消す. (18.1 節を見よ.) これらの新しいくりこまれた質量と結合定数は, 直接に物理的な意味を持つわけではないが, 真の物理的質量と全ての物理的行列要素はこれらを使って表わされる. これらの行列要素は裸の質量がゼロの行列要素の和の形をとる. それにはくりこまれた質量演算子 $N^{(\phi^2)}\phi^2$ と $N^{(\bar\psi\psi)}\bar\psi\psi$ とに, それらに対応するくりこまれた質量パラメータがかかったものが, 任意個数挿入されている.

このくりこみの処方では, 種々の結合定数のベータ関数は明らかに質量に依存しない. また, 質量パラメータのベータ関数はこれらのパラメータに比例し, その係数は全ての様々な結合定数に依存する. (18.2.25) から以下を得る.

$$\mu\frac{d}{d\mu}m_\psi(\mu) = [-1-\gamma_{\bar\psi\psi}(g_\mu)]\, m_\psi(\mu)\ , \tag{18.4.15}$$

$$\mu\frac{d}{d\mu}m_\phi^2(\mu) = [-2-\gamma_{\phi^2}(g_\mu)]\, m_\phi^2(\mu)\ . \tag{18.4.16}$$

例えば, 18.2 節では (18.1.2) のラグランジアンを持つスカラー場の理論において, 質量演算子 ϕ^2 は $m=0$ で異常次元 (18.2.29) を持つことを見た. したがって, ここでは,

$$\mu\frac{d}{d\mu}m_\phi^2(\mu) = \left[-2+\frac{g_\mu}{16\pi^2}+O(g_\mu^2)\right]\, m_\phi^2(\mu) \tag{18.4.17}$$

となる. また, (11.4.3) から電子のプロパゲーターへの高次補正の効果は電子の質量を $m_e - \Sigma^*(p, m_e)$ で置き換えることがわかるから, 演

算子 $\bar{\psi}_e\psi_e$ を 4 元運動量 p^μ の 1 電子状態ではさんだ行列要素へのこれらの補正の効果は，それに以下の因子がかかることだ．

$$F(p) = 1 - \left(\frac{\partial\Sigma^*(p,m_e)}{\partial m_e}\right)_{m_e=0} .$$

したがって，演算子 $\bar{\psi}_e\psi_e$ のくりこみ定数 $N^{\bar{\psi}\psi}$ は p^2 をあるくりこみスケール，例えば $+\mu^2$ にとって計算した $F^{-1}(p)$ に等しい．(11.4.8) によれば，1 ループの次数では，これは以下となる．

$$\begin{aligned} N^{(\bar{\psi}\psi)} &= 1 + \left(\frac{\partial\Sigma^*_{1\ \mathrm{loop}}(p,m_e)}{\partial m_e}\right)_{m_e=0,\, p^2=\mu^2} \\ &= 1 - \frac{4\pi^2 e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx\ \ln\left[1+\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right)(1-x)\right] \\ &\to 1 - \frac{e^2}{4\pi^2}\left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right) - 1\right] . \end{aligned} \tag{18.4.18}$$

ここで Λ は紫外切断定数であり，** $\Lambda \gg \mu$ の極限をとっている．したがって，演算子 $\bar{\psi}_e\psi_e$ の異常次元は，(18.2.25) により，

$$\gamma^{(\bar{\psi}\psi)} = \mu\frac{d}{d\mu}\ln N^{(\bar{\psi}\psi)} = \frac{e_\mu^2}{2\pi^2} + O(e_\mu^4) \tag{18.4.19}$$

と与えられる．これにより，(18.4.15) はここでは，

$$\mu\frac{d}{d\mu}m_e(\mu) = \left[-1 - \frac{e_\mu^2}{2\pi^2} + O(e_\mu^4)\right] m_e(\mu) \tag{18.4.20}$$

となる．同じ表式が一般のゲージ理論についても成り立つ．その場合は，e^2 を問題とするフェルミオンの種類の $\sum_\alpha (t_\alpha)^2$ の値に置き換えればよい．

$m(\mu)$ とその理論の他のくりこまれたパラメータとの重要な差異はもちろん，裸の質量は正の次元を持つために，結合定数が小さくとどまる限り，$m(\mu)$ は小さくなることだ．$\mu \to \infty$ で質量が無視できると

**この記法は (11.4.8) の記法とは異なる．そこでは紫外切断定数は μ と書いた．

いう我々の前の仮定は, $\mu \to \infty$ で実際に $m(\mu)$ がゼロになれば正当化される. しかし, これが成立することがわかっているのは $\mu \to \infty$ で全ての結合定数が小さく留まる漸近的自由な理論の場合のみだ. 他の全ての場合はこれは単にもっともらしい仮定にすぎない.

18.5 臨界現象*

目的によっては高エネルギーや波数が高い場合よりも, むしろ非常に低エネルギーの極限に興味がある場合もある. 18.2 の議論はこの極限を調べるためにも使うことができるが, ただ, $\mu \to \infty$ ではなく $\mu \to 0$ の場合を調べなければならない. この極限はもちろん, 理論に質量が無ければ最も簡単だ. その例としては, 量子電磁理論にカイラル変換 $\psi \to \gamma_5\psi$ のもとでの対称性があって, 電子の質量が禁じられている場合がある. この場合には, 全ての非くりこみ可能な結合定数のみならず, 唯一のくりこみ可能な結合 $eA^\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ も結合定数が十分に小さいときには $\beta^\ell > 0$ だ. したがって, 少なくとも, 原点の有限な近傍にある全ての軌跡は, $\mu \to 0$ で $g^\ell = 0$ の点に引き寄せられる.

非常に小さいがゼロではない質量を持つ理論でも, 前の節で述べたようにその質量を結合定数に含めると, 同様な考察が適用できる. (18.4.12) の係数 Δ は質量パラメータについては正だから, この場合には軌跡は $g = 0$ の点に決して到達することができない. しかし, 質量が小さければ近くに来ることはできる.

もちろん, たとえ電子場のような幾つかの自由度の質量がゼロか非常に小さいと見なしても, 現実の世界では質量が小さくない自由度は他に多くある. くりこみ群はそれらの重い自由度を全て含んだ真の理論に適用されるのではなく, 質量がゼロかほぼゼロの自由度のみを陽

*この節はこの本の議論の本筋からは多少外れているので, 最初読むときには飛ばしてもよい.

に含み, 重い粒子の内線の効果は相互作用に含む「有効」場の理論について適用するべきだ. (有効場の理論については 19 章でより詳しく述べる.)

低波数極限は, 臨界現象を調べる際, 例えば凝縮物質の 2 次相転移 (潜熱の無い滑らかな相転移) かその付近での長距離相関などを調べる際には特に重要となる. $\mu \to 0$ の極限に興味があるので, 行列 (18.4.4) の固有ベクトルのうち重要なのは, 固有値 $\lambda < 0$ を持つものだ. これは**成長的** (relevant) だという. $\lambda = 0$ と $\lambda > 0$ の固有ベクトルはそれぞれ, **停留的** (marginal) と**収縮的** (irrelevant) と呼ぶ.

自明でない固定点 g_* が負の固有値 λ_0 を一つだけ持つとしよう. これは例えば質量演算子にほぼ相当していると考えればよい. このとき, $\mu \to 0$ でこの固定点に引き寄せられる軌跡 $g^\ell(\mu)$ の集合は, 余次元 1 の臨界面を作る. この臨界面は, $g \to g_*$ のときに接線 $g^\ell - g_*^\ell$ が負の固有値をもつ固有ベクトルの方向に成分を持たないという結合定数に対する単一の条件で定義されたものだ. 任意の固定された特徴的なスケールでの結合定数の物理的な値がこの表面に近づくとき, 相転移が起こる. 臨界面は余次元 1 だから, 相転移は結合定数が依存する任意の一つのパラメータ, 例えば圧力や温度など, を調節することで相転移を起こせる. 広い種類の物質がこの種の相転移を起こすことから, 前の節で述べたように, 行列 (18.4.4) が負の固有値を一つだけ持つ固定点があるのが普通だということがわかる.

特に, 温度 T がその臨界値 T_c に近づくにつれて, (18.4.5) の増大する項の係数 c_0 は $T - T_c$ に比例することがわかる. これは, それが特異である理由も無いし, これより早くゼロとなる理由も無いからだ. したがって, $\mu \to 0$ で $T \to T_c$ のとき, 結合定数は,

$$g^\ell(\mu) \to (T - T_c)\, V_0{}^\ell\, \mu^{\lambda_0} \tag{18.5.1}$$

のように振舞う. ここで λ_0 は g_* での唯一の負の固有値であり, $V_0{}^\ell$

はその固有ベクトルだ.** 我々のくりこみ群の議論をエネルギーの代りに波数に適用して, ある典型的な波数の大きさ κ での N 点関数 ([波数]$^{D_\phi}$ の次元を持つ場 ϕ についての有効作用の N 階偏微分) は†, 以下の形をとることがわかる.

$$\Gamma_N(\kappa) \to \kappa^{d-N(D_\phi+\gamma_\phi(g_*))} F_N((T-T_c)\kappa^{\lambda_0}) \,. \tag{18.5.2}$$

ここで, $\gamma_\phi(g)$ は場 ϕ の異常次元であり, d は時空の次元, もしくは古典統計力学では空間の次元だ. これを同等な以下の形に書いておくと便利だ.

$$\Gamma_N(\kappa) \to (T-T_c)^{-[d-N(D_\phi+\gamma_\phi(g_*))]/\lambda_0} G_N(\kappa(T-T_c)^{1/\lambda_0}) \,. \tag{18.5.3}$$

これは, 一つには相関距離 ξ (Γ_N のフーリエ変換が変化する範囲の大きさを決める特徴的な長さ) は T が T_c に近づくときに,

$$\xi \propto (T-T_c)^{-\nu} \tag{18.5.4}$$

のように増大することを意味する. ここで, ν は通常のように定義した正の**臨界指数** (critical exponent) であり, (18.5.3) より,

$$\nu = -1/\lambda_0 \tag{18.5.5}$$

と与えられる. また, 場がゼロのときの有効作用 Γ_0 (統計物理では自由エネルギーと呼ばれる) は κ に依存しない. これは, この作用が外線の無いダイアグラムに相当するからだ. したがって, この場合には, (18.5.3) は $T \to T_c$ で,

$$\Gamma_0 - F_0 \propto (T-T_c)^{\nu d} \tag{18.5.6}$$

**結合定数への他の寄与は, $\lambda_1 > 0$ について $(T-T_c)^0\mu^{\lambda_1}$ と振舞う. したがって, $T-T_c$ が $\mu^{\lambda_1-\lambda_0}$ ほどには早くゼロに近づかない限り, (18.5.1) は正しい.

†関数 F_N は無次元の角度と波数の比にも依存する. $\delta^d(\sum\kappa)\Gamma$ は無次元でなければならないから, Γ_N の「すなおな」次元は $d-ND_\phi$ であることに注意してほしい.

となる．ここで，定数 F_0 は積分してしまった重い自由度による有効作用または自由エネルギーだ．これより，指数 ν はまた，T が T_c に近い際に温度に関して解析的でない自由エネルギーの部分の振舞いを決定する．

1972 年にウィルソンとフィッシャー (Fisher)[7] は $d-4$ についての展開を使い，スカラー場の理論が実際に上に述べた通りであることを示し，ν のような臨界指数の近似計算を行った．強磁性体の磁化に相当するようなスカラー場 ϕ を一つだけ，「軽い」自由度として持つ理論を考える．この理論には $\phi \to -\phi$ の対称性があり，ϕ について奇数冪の相互作用は禁止されているとする．「質量」項 $-g_2\phi^2/2$ に加えて，有効場の理論のラグランジアン密度は $-g_4\phi^4/4!$ や $-g_6\phi^6/6!$ などの相互作用を持つ．場 ϕ の波数の冪での次元は $(d-2)/2$ だ．($\int d^dx\,(\nabla\phi)^2$ が無次元なことによる.) そのため，d 次元での結合定数 g_2, g_4, g_6 等の次元は，それぞれ $+2$, $4-d$, $6-2d$ 等となる．3 次元での結合定数がゼロの固定点では，成長的結合は g_2, g_4 の二つだ．しかし，この結果は自明でない固定点では相互作用のために異なる．結合定数の空間の g_2 と g_4 のみがゼロでない表面のうち，g_4 が小さいところを調べよう.[††] (18.2.12) は $d=4$ で $\beta(g_4)=3g_4^2/16\pi^2+O(g_4^3)$ を与える．(18.4.12) からは，$d=4-\epsilon$ 次元では，これに $-\epsilon g_4$ の項を加えなければならないことが分かるので，

$$\mu\frac{d}{d\mu}g_4(\mu)=-\epsilon\, g_4(\mu)+\frac{3g_4^2(\mu)}{16\pi^2}+O(g_4^3(\mu)) \tag{18.5.7}$$

となる．また，(18.4.17) から以下を得る．

$$\mu\frac{d}{d\mu}g_2(\mu)=\left[-2+\frac{g_4(\mu)}{16\pi^2}+O(g_4(\mu))\right]g_2(\mu)\,. \tag{18.5.8}$$

[††] $3\le d\le 4$ ではこれらのみがくりこみ可能な結合だ．したがって，その様な d では不変表面になり得る．ここでは結合定数に $(\nabla\phi)^2$ の係数は含めていないことに注意してほしい．なぜなら，これは 7.7 節で説明した意味で余剰結合だからだ．

したがって, ϵ が小さいときには,

$$g_{4*} = \frac{16\pi^2\epsilon}{3}, \qquad g_{2*} = 0 \tag{18.5.9}$$

に自明ではない固定点がある. この点での行列 (18.4.4) は対角的であり, この固有値は以下で与えられる.

$$\lambda_4 = M^4{}_4 = -\epsilon + \frac{3g_{4*}}{8\pi^2} + O(g_{4*}^2) = +\epsilon + O(\epsilon^2)\,, \tag{18.5.10}$$

$$\lambda_2 = M^2{}_2 = -2 + \frac{g_{4*}}{16\pi^2} + O(g_{4*}^2) = -2 + \frac{\epsilon}{3} + O(\epsilon^2)\,. \tag{18.5.11}$$

(18.5.10) から, 結合 g_4 は実際に収縮的であり, ここでは成長的な結合はただ一つしかないことがわかる. これは 2 次相転移の存在を示唆する. (18.5.11) から, 異常次元 (18.5.5) は,

$$\nu = -\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12} + O(\epsilon^2) \tag{18.5.12}$$

となる. $\epsilon = 1$ という物理的な場合には最初の 2 項は, $\nu \simeq 0.58$ を与える. 3 ループ計算[8a] によれば, ϵ^3 次の臨界指数は,

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12} + \frac{7\epsilon^2}{162} - 0.01904\epsilon^3 \tag{18.5.13}$$

と与えられる. $\epsilon = 1$ では $\nu = 0.61$ となる.

ここで述べた計算では, 調べている系について, 2 次相転移が起こり, その付近では単一のスカラー場のみが長距離相関を持つ自由度だという以外に何も仮定しなかった. これに当てはまる物理的な系は幾つかある. 例えば, 強磁性体や反磁性体での自発磁化 (それがここでの ϕ に相当する) また, 液体と気体の間や, 2 成分液体での 2 次相転移もそうだ. これらの系はどれも同じ ν の値を持つと考えられる. これは実験により確かめられている. 実際, 実験[8] では $\nu = 0.63 \pm 0.04$ の値が得られているが, これは 3 ループの値 (18.5.13) と一致し, また, 1 ループの値 (18.5.12) とさえよく合っている. 1 についての冪展開がこれ程よく働くのは多少不思議であるが, 幸運なことでもある.

より一般的には, 2 次相転移の近くで同じ長波長自由度の組を持つ系は, 全て同じ**普遍類** (universality class) に属するという. 同じ普遍類に属する系は全て同じ臨界指数を持つ.

18.6 最小引算

11.2 節では量子電磁理論では, 輻射補正を計算する際に, 次元正則化がゲージ不変性に伴う保存則を保つために特に便利なことを見た. 同じ理由で, 次元正則化は一般のゲージ理論でくりこみ群の変化するスケールの非常に便利な別の定義を与えることがわかる.

次元正則化を使った計算では, 紫外発散は時空の次元 d が物理的な値 $d=4$ に近づくときの極として現れる. (例えば (11.2.13) を見よ.) これらの極を打ち消すために, 裸の結合定数 $g_B^\ell(d)$ (質量を含む) はそのような極を含まなければならない. その留数は物理的振幅が $d\to 4$ で正則だという条件で決まる. これらの裸の結合定数は一般的にゼロでない次元 $\Delta_\ell(d)$ を持ち, それは時空の次元 d に依存する. したがって, μ をエネルギーや質量の次元を持った変化するスケールとして, 無次元量 $g_B^\ell(d)\mu^{-\Delta_\ell(d)}$ を考えると便利だ. このスケールを変えた結合定数は, $1/(d-4)$ の正の ν 次の冪に比例する項の和で, その各係数 b_ν は物理的な振幅において $d\to 4$ で特異性が打ち消し合っているように決められたものに, d が $d=4$ のときに解析的な残りの部分を加えたものとして表わされる. この残りの部分は無次元のくりこまれた結合定数 $g^\ell(\mu,d)$ と思えるので,

$$g_B^\ell(d)\mu^{-\Delta_\ell(d)} = g^\ell(\mu,d) + \sum_{\nu=1}^{\infty}(d-4)^{-\nu}\, b_\nu^\ell(g(\mu,d)) \tag{18.6.1}$$

となる. 裸の結合定数には, 物理的な振幅の $d=4$ での特異性が打ち消されている限り, 好きなように d 依存性を付すことができる. したがって, $d=4$ のみならず全ての d について $g^\ell(\mu,d)$ が解析的である

と要求することでこの任意性を除くことにする.

$g^\ell(\mu,d)$ が満たすくりこみ群の方程式を導くために, まず (18.6.1) を μ について微分して以下を得る.

$$-\Delta^\ell(d)\left[g^\ell+\sum_{\nu=1}^{\infty}(d-4)^{-\nu}b^\ell_\nu(g)\right]=$$
$$\beta^\ell(g,d)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_m b^\ell_{\nu m}(g)\,\beta^m(g,d)(d-4)^{-\nu}\,. \quad (18.6.2)$$

ここで,

$$b^\ell_{\nu m}(g)\equiv\frac{\partial}{\partial g^m}b^\ell_\nu(g) \quad (18.6.3)$$

であり, また前と同じように,

$$\mu\frac{d}{d\mu}g^\ell(\mu,d)=\beta^\ell(g(\mu,d),d) \quad (18.6.4)$$

となっている. β^ℓ は全ての $g^m(\mu,d)$ と d の関数だが, 別個に μ には依存できない. これは, 再スケールした質量を無次元の結合パラメータに含めたので, μ 以外に次元を持つ量がないためだ.

上で見たように, 次元 $\Delta_\ell(d)$ は常に d の線形関数だ. これを以下のように書く.

$$\Delta_\ell(d)=\Delta_\ell+\rho_\ell(d-4)\,. \quad (18.6.5)$$

(18.6.2) の左辺を,

$$-\rho_\ell g^\ell(d-4)-\left[\Delta_\ell g^\ell+b^\ell_1(g)\rho^\ell\right]-\sum_{\nu=1}^{\infty}(d-4)^{-\nu}\left[\rho_\ell\, b^\ell_{\nu+1}(g)+\Delta_\ell b^\ell_\nu(g)\right]$$

と書きかえる. この解析的部分の d の最高次は一次だから, (18.6.2) の右辺でもそうでなければならない. したがって, $\beta(g,d)$ は d について線形だ.

$$\beta^\ell(g,d)=\beta^\ell(g)+(d-4)\alpha^\ell(g)\,. \quad (18.6.6)$$

(18.6.2) の一次とゼロ次の項を等しくおくと,

$$\alpha^\ell(g) = -\rho_\ell\, g^\ell \tag{18.6.7}$$

および, より重要な以下の式を得る.

$$\beta^\ell(g) = -\Delta_\ell g^\ell - b_1^\ell(g)\rho_\ell + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_m b_{1\,m}^\ell(g)\,\rho_m g^m\ . \tag{18.6.8}$$

ベータ関数が裸の結合定数の 1 次の極の係数にのみ依ることは注意に値する. 実際, これらの係数は他の全ての高次の極の係数も決める. (18.6.2) の右辺と左辺の極の項を等しく置くと, 以下の漸化式を得る.

$$\rho_\ell b_{\nu+1}^\ell(g) - \sum_m \rho_m g^m b_{\nu+1\,m}^\ell(g) = -\Delta_\ell b_\nu^\ell(g) - \sum_m b_{\nu\,m}^\ell(g)\beta^m(g)\ . \tag{18.6.9}$$

例えば, $\int d^dx\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ が無次元であるためには任意のゲージ場 A^μ は (質量の冪で) 次元 $(d-2)/2$ を持たなければならない. また, $g_B A^\mu$ は $\partial/\partial x^\mu$ と同じ次元でなければならないから, g_B は $(4-d)/2$ の次元を持たなければならず, ゲージ結合定数については $\Delta = 0$ で $\rho = -1/2$ だ. したがって, (18.6.8) は単一の結合定数のみを持つゲージ理論では,

$$\beta(g) = \tfrac{1}{2}\left[b_1(g) - g b_1'(g)\right] \tag{18.6.10}$$

となる. 特に (11.2.20) は, 量子電磁理論は 1 ループの次数では裸の電荷は $d \to 4$ で極を持ち,

$$e_B = Z_3^{-1/2} e \to e - \frac{e^3}{12\pi^2}\frac{1}{d-4} \tag{18.6.11}$$

となっていることを意味する. (18.6.10) において $b_1(e) = -e^3/12\pi^2$ と置いて以下を得る.

$$\beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2}\ . \tag{18.6.12}$$

これは前に得た (18.2.37) の結果と一致する.

この節で導入した結合定数 $g^\ell(\mu)$ は**最小引算** (minimal subtraction) で定義したと言う. これと僅かに異なり, 多少ともより便利な方式もある. 単純な極 $(d-4)^{-1}$ は, 通常 $(4\pi)^{d/2-2}\Gamma(2-d/2)$ という関数から生じる (例えば (11.2.13) のように). この関数は, $d \to 4$ において以下の振舞いをする.

$$(4\pi)^{2-d/2}\,\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) \to \frac{1}{2-d/2} - \gamma + \ln 4\pi\,. \tag{18.6.13}$$

ここで γ はオイラーの定数, $\gamma = 0.5772157$ だ. したがって (18.6.1) のどこでも以下の置き換えをすると便利だ.

$$\frac{1}{d-4} \to \frac{1}{d-4} + \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2}\ln 4\pi\,. \tag{18.6.14}$$

この方式では, 結合定数は**修正した最小引算** (modified minimal subtraction) によって定義したと言う.

最小引算 (もしくは修正した最小引算) で定義した結合定数の顕著な特徴は, どの計算にも紫外切断因子が現れないので, $d=4$ で極を持つループ・ダイアグラムは対数紫外発散のみを持ち, 線形や 2 次の発散を持たないことだ. 留数関数 $b_1^\ell(g)$ は $d=4$ で g_B^ℓ の次元が結合定数 g_B^a, g_B^b, g_B^c 等を合わせた次元と同じときにのみ, $g^a g^b g^c \cdots$ の項を含むことができる.

$$\Delta_\ell = \Delta_a + \Delta_b + \Delta_c + \dots\,. \tag{18.6.15}$$

そして, これより, (18.6.8) から $\beta^\ell(g)$ についても同じであることがわかる. 特に, 超くりこみ可能な結合を持たない理論 (例としては, 電子の質量がゼロの量子電磁理論のように, 質量ゼロのスピノル場を持ちスカラー場を持たないゲージ理論がある) 全ての結合定数は $\Delta_\ell \le 0$ となっている. したがって, くりこみ可能な ($\Delta_\ell = 0$ となっている) 結合定数のくりこみ群方程式は非くりこみ可能な相互作用が存在してもそれに影響されない.[5] また, そのような理論では非

くりこみ可能な結合定数のベータ関数は非くりこみ可能な結合定数について有限次の多項式であり, 各多項式の各係数はくりこみ可能な結合定数の無限級数になっている. 例えば, 光子と質量ゼロの電子の理論 ($\psi \to \gamma_5\psi$ と P のもとで不変とする) では, 次元 +5 の非くりこみ可能な相互作用は存在しない. また, 次元 +6 の相互作用は幾つか (4 体相互作用や純粋に光子だけの相互作用 $F_{\mu\nu}\Box F^{\mu\nu}$ など) 存在し, その結合定数 f_i は次元 −2 を持つ. f_i のベータ関数は $\sum_j b_{ij}(e)f_j$ の形で, その係数 $b_{ij}(e)$ は e の冪級数で与えられる.

18.7 量子色力学

量子色力学は強い相互作用の現代的理論だ. それは非可換ゲージ理論であり, $SU(3)$ をゲージ群として持つ. ゲージ群に加えて, 量子色力学はスピン $\frac{1}{2}$ のクォークとして知られる粒子を持つ. クォークには「フレーバー」(flavor) として知られる種類が 6 種ある. それらは, 電荷 $2e/3$ を持つ u, c, t と電荷 $-e/3$ を持つ d, s, b だ. 各フレーバーのクォークは 3 つの「色」(color) を持ち, $SU(3)$ ゲージ群の $\mathbf{3}$ 表現を成している.* 陽子や中性子のようなバリオン (重粒子) は近似的に 3 個のクォークが色について完全反対称に組み合わさって色について中性になった束縛状態と見なされる. また, ロー中間子のような中間子は, 近似的にクォークと反クォークからなり, 色について中性な束縛状態のように振舞う. [11]

クォークの質量が興味のあるエネルギーに比べて無視できる近似では, (17.5.44) の逆から一般のゲージ理論の裸の結合定数は時空の次元

*量子色力学が最終的に完成する前に, すでに何人かの研究者は各フレーバーのクォークには 3 種類あると推察していた.[10] これは, $\pi^0 \to \gamma + \gamma$ 崩壊率 (22.1 節と 22.2 節を見よ) の大きさを説明するためと, フェルミオンであるクォークのハドロン内での波動関数がスピン, 空間, フレーバーの座標空間で対称であることを説明するために余分な自由度を導入するためだった.

が $d \to 4$ で極を持ち, その留数は以下で与えられることがわかる.

$$g_B \to \left[\frac{g^3}{4\pi^2}\left(\frac{11}{12}C_1 - \frac{1}{3}C_2\right) + O(g^5)\right]\frac{1}{d-4} .$$

ここで, C_1 と C_2 は (17.5.33) と (17.5.34) で定義される. つまり, 前の節の記法では,

$$b_1(g) = \frac{g^3}{4\pi^2}\left(\frac{11}{12}C_1 - \frac{1}{3}C_2\right) + O(g^5) \qquad (18.7.1)$$

となる. これを (18.6.10) に用いると,

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{4\pi^2}\left(\frac{11}{12}C_1 - \frac{1}{3}C_2\right) + O(g^5) \qquad (18.7.2)$$

を得る. $SU(3)$ 理論で, $SU(3)$ の基本表現 **3** に属する n_f 個の質量ゼロのクォークを持つ場合は, (17.5.35) は以下を与える.

$$C_1 = 3 , \quad C_2 = n_f/2 . \qquad (18.7.3)$$

クォークは質量ゼロとしたから, この表式が適用できるのは, 考慮している典型的なエネルギー E より重たいクォークを積分してしまって得られる有効場の理論に限られる. したがって, n_f は E よりずっと軽い質量のクォークのフレーバーの数だ. この理解のもとで, (18.7.2) と (18.7.3) から以下を得る.

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{4\pi^2}\left(\frac{11}{4} - \frac{1}{6}n_f\right) + O(g^5) . \qquad (18.7.4)$$

これより, 問題とするエネルギーより軽いクォークのフレーバーが 16 を超えない限り, 理論は漸近的自由だとわかる. 現実にはどんな質量のものを合わせてもクォークのフレーバーは 6 しかないように思えるので, $SU(3)$ のゲージ群に基づいた強い相互作用の理論は漸近的自由だ.

これが強い相互作用の正しい理論だと理論物理学者一般に確信させたのは, グロスとウィルチェック[12], またポリッツァー[13]による 1973

年のこの種の非可換ゲージ理論の漸近的自由性の発見だった. 彼らの計算はすぐに, 有名な 1968 年の SLAC での電子・核子の深非弾性散乱実験での, 強い相互作用が高エネルギーで弱くなっているように見えるという不思議な結果を説明した.** (この実験については, 20.6 節で更に論じる.) しかし, ヤン・ミルズ理論での漸近的自由性の発見は, 古い実験結果を説明したことだけが歴史的に重要なのではない. それは, 高エネルギーでのみではあるが, 強い相互作用の信頼できる摂動計算が可能になるという展望が初めて開けたことにある.

漸近的自由性にはすぐに他の重要な含みがあることがわかった. 漸近的自由性の発見後, 当初は強い相互作用の現実的なヤン・ミルズ理論ではゲージ・ボソンは非常に重たいと広く思われていた. これは, そうでないと, ゲージ・ボソンはそれよりずっと以前に見つかっているはずだと思われたからだ. 弱電磁相互作用 (21 章で述べる) の理論の前例に従うと, これらのゲージ・ボソンの質量は色 $SU(3)$ ゲージ群の自発的な破れによって生じると思われた. これはゲージ群の非自明な表現に属するスカラー場の真空期待値によって引き起こされるはずだ. しかし, そのような強く相互作用するスカラー場は $\beta(g)$ に正の寄与をして, 漸近的自由性を破壊しかねない. さらに悪いことに, 強く相互作用するスカラー場の理論では, 弱い相互作用を含む輻射補正が, 荷電共役不変性やフレーバー保存などのスカラー場が無ければ破れらない各種の対称性を大きく破る.[17] そこで, 強く相互作用するスカラー場をやめて, $SU(3)$ ゲージ・ボソンであるグルーオンを質量ゼロとする提案がなされた.[18] 高エネルギーや短距離で結合定数が減少

**ジー[15] と多分他の理論家も, この実験結果は小さい正の結合定数で負となるベータ関数を持つ理論で説明できると既に理解していた. しかし, 非可換ゲージ理論以外の全てのくりこみ可能な場の理論での $\beta(g)$ の計算は全て $\beta(g) > 0$ を与えていた. 一方, 1972 までにはト・フーフトはヤン・ミルズ理論での $\beta(g)$ の計算法を開発していて, 1972 年 6 月に彼はマルセイユでのゲージ理論の会議[16]で $\beta(g) < 0$ と発表した. しかし, 彼は他の仕事もしながら, この結果の発表とその意味の解明をを遅らせていたので, 彼の結果はあまり注意を引かなかった.

するということは, もちろん, 低エネルギーや長距離で結合定数が増大することを意味する. この事実が, グルーオンやクォークが発見されていないことを説明するのではないかと考えられた. この仮説によれば, バリオンや中間子のような色について中性の粒子だけが孤立して現れることができる.[19] 不幸なことに, これは依然として定理というよりは仮説だ. しかし, 20 年経ったいま, これが正しいことにほぼ疑いはない.

クォークは自由粒子として現れることはできないが, 高エネルギーでの衝突過程ではジェットとして, ある意味で観測されているといえる. 例えば, 電子・陽電子消滅の多くの事例では, 終状態は二つの狭く絞られたハドロンのジェットでできている. (重心系での) 衝突するレプトンの運動量とジェットの方向の間の角度 θ についての分布は $1+\sin^2\theta$ で与えられる. これは, ちょうど電子・陽電子消滅でクォーク・反クォーク終状態ができる樹木ダイアグラムから期待される分布だ.[20] これは 13.4 節の赤外発散の一般的な解析から理解できる.[21] 非常に高いエネルギーでは物理的過程の反応率は摂動論の最低次で与えられると考えられる. これは全ての質量をゼロとしたときに赤外発散しないという意味で,「赤外安全」(infrared-safe) と仮定したときだ. 電子・陽電子消滅でハドロンが生成される率の全合計は, 全てのハドロン的な終状態について和を取るために赤外安全だ. (ここでは高次の電磁効果を無視している.) したがって, 摂動論に頼ることができて, すぐにこの率と $e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-$ の率の比 R が $R = 3\sum_q Q_q^2$ となることがわかる. ここで和は全てのクォークのフレーバーについてとり, Q_q は e を単位としたクォークの電荷, 因子 3 は色の数だ. (例えば, $m_b \approx 4.5$ GeV と $m_t \approx 180$ GeV の間の広い範囲で $R \simeq 3(2(2/3)^2 + 3(-1/3)^2) = 11/3$ となっている.) 一方, 電子・陽電子消滅でクォークとグルーオンのある一定の状態ができる反応率は赤外安全ではなく, したがって摂動論では全く計算できないし, 実際計算してもゼロとなる. この二つの極

限の中間にあるのが, 電子・陽電子消滅において, 一定の全運動量と全電荷を持つジェットが一定の本数できて, それ以外に全エネルギーが決められた観測されないハドロンの組がある場合だ. 13.4 節で論じたようにこの過程の反応率は赤外安全だ. したがって, これは高エネルギーで摂動論の樹木ダイアグラム近似で, (摂動論のこの次数では) 出て行くクォーク, 反クォークやグルーオンをジェットと同定して計算できる. また, 出て行くクォークか反クォークからグルーオンが放出される樹木ダイアグラムを使って 3 ジェット事象の反応率さえも計算できる. この結果と実験結果を比較し, これから $\alpha_s(\mu)$ の値を決めることができる.[22] しかし, 摂動論を使ってジェット内の運動量分布を予言することはできない. これはそのような比は赤外安全ではないからだ. 同じような論旨が深非弾性レプトン・ハドロン衝突でのジェット生成にも当てはまる. これは 20.6 節で論じるが, 始状態にハドロンがあるためにその解析はより複雑となる.

12.5 節と同じ理由により, スカラー場が無ければ, 量子色力学の最も一般的なくりこみ可能なラグランジアンは,

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4}F_\alpha^{\mu\nu}F_{\alpha\mu\nu} - \sum_n \overline{\psi}_n[\partial\!\!\!/ - ig A\!\!\!/_\alpha t_\alpha + m_n]\psi_n \tag{18.7.5}$$

という形に書ける. ここで, A_α^μ は色ゲージ・ベクトル・ポテンシャル, $F_\alpha^{\mu\nu}$ は色ゲージ共変な場の強度テンソル, g は強い結合定数, t_α は色の $SU(3)$ の **3** 表現の生成子の完全系 (つまり, 行と列が 3 つのクォークの色に相当する, エルミートでトレースがゼロの 3×3 行列) で, $\mathrm{Tr}\,(t_\alpha t_\beta) = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}$ と規格化されたもの, そして, 添字 n はクォークのフレーバーを意味し, クォークの色の添字は省略してある. 12.5 節で電磁理論について見たように, このラグランジアンは重要な偶然的な対称性を持っている. それは, 空間反転のパリティ,† 荷電共役のパリティ, それと, それぞれのフレーバーのクォークの数 (引くことの対

---

†1973 年には知られていなかったが, 23.6 節で見るように, 非摂動的効果は量子色

応する反クォークの数)を保存する. クォーク数の内, s クォークの数は「ストレンジネス」(奇妙さ)の量子数として長く知られてきた. したがって, 量子色力学は, 強い相互作用が全ての相互作用の対称性ではない各種の対称性を持っているという不思議な事実を簡単に説明する. この議論はまた, 前に述べたように, 弱い相互作用がなぜ空間のパリティ, 荷電共役, ストレンジネス等を大きく破らないかを明らかにする. クォークとグルーオンの全てのくりこみ可能な相互作用はこれらの対称性を保存するから, 弱い相互作用を運ぶ粒子の質量 m_W よりずっと小さなエネルギー E では, これらの対称性は有効場の理論の非くりこみ可能な相互作用項によってのみ破られる. それは, 例えば $\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi$ のような相互作用であり, 12.3 節で論じたように弱い相互作用の結合定数のみならず, m_W の負の冪で抑えられる.

もちろん, 量子色力学の特徴的なエネルギーの大きさ Λ よりずっと大きな Λ' のエネルギーの大きさで, クォークとグルーオンが何らかの新しい種類の強い相互作用を持つことは可能だ. 例えば, 22.5 節で論じるように, クォークはより基本的なフェルミオンの束縛状態であり, そのフェルミオンとゲージ場との漸近的自由な結合定数はある Λ' の大きさのエネルギーで強くなり, そのために, それらがクォーク内に閉じ込められているかもしれない. その場合には, エネルギー $E \ll \Lambda'$ でのクォークの有効ラグランジアン密度は, $\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi$ のような非くりこみ可能な相互作用を含み, E/Λ' の冪だけで抑えられている. これらの相互作用は通常のエネルギーでのパリティとクォーク・フレーバー保存則のような対称性を僅かに破るのみならず, エネルギーが Λ' に近づくときに, 量子色力学の量的な予言からのずれ[23]が起こることでわかる.

さて, 量子色力学の結合定数の振舞いについて詳細に調べよう. 最

力学のパリティを破ることができる. 強いパリティの破れを避けるための方法は種々提案されたが, どれが正しいのかはまだ明らかになってはいない.

低次では，くりこみ群の方程式は (18.7.4) によって，以下のように与えられる．

$$\mu\frac{d}{d\mu}g(\mu) = -\frac{g^3(\mu)}{4\pi^2}\left(\frac{11}{4} - \frac{1}{6}n_f\right) . \tag{18.7.6}$$

その解は，

$$\alpha_s(\mu) \equiv \frac{g^2(\mu)}{4\pi} = \frac{12\pi}{(33-2n_f)\ln(\mu^2/\Lambda^2)} \tag{18.7.7}$$

だ．ここで，Λ は積分定数だ．この表式は質量ゼロ (もしくは，クォークについては近似的に質量ゼロ) の粒子の理論については特徴的な性質を表わしている．それは，そのような理論ではラグランジアンの無次元な結合定数の一つが，次元のある自由パラメータに置き換えられていることだ．(18.7.7) は無次元な自由パラメータを含んでいないが，質量の次元を持つ Λ という積分定数を含んでいる．

これらの計算は 3 ループまでなされている．この次数ではくりこみ群方程式は以下で与えられる．[24]

$$\mu\frac{d}{d\mu}g(\mu) = -\beta_0\frac{g^3(\mu)}{16\pi^2} - \beta_1\frac{g^5(\mu)}{128\pi^4} - \beta_2\frac{g^7(\mu)}{8192\pi^6} . \tag{18.7.8}$$

ここで，β_n は以下の数係数だ．

$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f , \tag{18.7.9}$$

$$\beta_1 = 51 - \frac{19}{3}n_f , \tag{18.7.10}$$

$$\beta_2 = 2857 - \frac{5033}{9}n_f - \frac{325}{27}n_f^2 . \tag{18.7.11}$$

その解は以下で与えられる．

$$\alpha_s(\mu) \equiv \frac{g^2(\mu)}{4\pi}$$
$$= \frac{4\pi}{\beta_0\ln(\mu^2/\Lambda^2)}\left[1 - \frac{2\beta_1}{\beta_0^2}\frac{\ln[\ln(\mu^2/\Lambda^2)]}{\ln(\mu^2/\Lambda^2)}\right.$$

$$+\frac{4\beta_1^2}{\beta_0^4 \ln^2(\mu^2/\Lambda^2)}\left(\left(\ln\left[\ln(\mu^2/\Lambda^2)\right]-\tfrac{1}{2}\right)^2+\frac{8\beta_2\beta_0}{\beta_1^2}-\frac{5}{4}\right)\Bigg]. \tag{18.7.12}$$

上の結果において, n_f は問題とするエネルギーより小さな質量を持つクォークのフレーバーの数だということを思い出さなければならない. 2つのクォークの質量に挟まれたエネルギー領域ごとに n_f は異なり, また, $g(\mu)$ をそれぞれのクォークの質量で連続にするために Λ も異なる. 特に, 電子の深非弾性散乱実験は最初の4つのクォークのフレーバー (u, d, s, c) だけよりも高いエネルギーで行われるので, $n_f = 4$ としなければならない. 一方, PEP, PETRA, TRISTRAN, LEP のような施設での電子・陽電子衝突実験は, 第5のクォーク (b) の質量より十分上で行われるから, これらの実験では $n_f = 5$ としなければならない. しかし, これらの結果は b クォークの質量でくりこみ群の解をつなぐことで, $n_f = 4$ の値を使って表わすことができる. この方法で, (β_2 の計算には変更された最小引算処方を使い) $m_Z = 91.2$ GeV まで外挿された強い相互作用が, $\alpha_s(m_Z) \equiv g_s^2(m_Z)/4\pi = 0.118 \pm 0.006$ であり, これは, エネルギー μ が $m_b \ll \mu \ll m_t$ の領域 (そこで $n_f = 5$ だ) では $\Lambda \approx 250$ MeV に相当することがわかった.[25] より最近の Z 共鳴での e^+e^- 消滅でのハドロン発生の研究[26]では直接的に測定された値として $\alpha_s(m_Z) = 0.1200 \pm 0.0025$ が得られ, その理論的な不確定性は ± 0.0078 であり, これは, $\Lambda = 253^{+130}_{-96}$ MeV に相当する.

18.8 改善された摂動論*

ゲルマンとローの革新的な論文[1] ではその大部分が摂動論を「改善する」ことに費やされている. つまり, くりこみ群の思想と, ある次数

*この節はこの本の議論の本筋からは多少外れているので, 最初読むときには飛ばしてもよい.

までの摂動論の結果を使うことにより，摂動論の次の次数について何かを知るということだ．これを例示するために，ゲルマンとローが調べた量子電磁理論の真空偏極の問題に戻ろう．

浮動スケール μ でのくりこまれた電荷 e_μ は (18.2.36) によって裸の質量 e_B を使って，

$$e_\mu = N_\mu^{(A)-1} e_B \tag{18.8.1}$$

と与えられる．ここで，$N_\mu^{(A)}$ は，くりこまれていない電磁場にかかると μ でくりこまれた場を与える定数だ．((18.2.21) を見よ.) したがって，くりこまれた (したがって切断定数に依存しない) 完全な光子プロパゲーター $\Delta'_{\rho\sigma}(q,\mu,e_\mu)$ をくりこまれていない場の完全なプロパゲーター $\Delta'_{B\rho\sigma}(q,e_B)$ を使って，

$$\Delta'_{\rho\sigma}(q,\mu,e_\mu) = N_\mu^{(A)2}\Delta'_{B\rho\sigma}(q,e_B) \tag{18.8.2}$$

と定義し，関数 $e_\mu^2\Delta'_{\rho\sigma}(q,\mu,e_\mu)$ が，$e_B^2\Delta'_{B\rho\sigma}(q,e_B)$ に等しいので μ に依存せず，また，e_μ と $\Delta'_{\rho\sigma}(q,\mu,e_\mu)$ が共にくりこまれた量だから，切断定数にも依存しないようにできる．(ここでは切断定数を陽に書いていない.) しかし，ローレンツ不変性と次元解析からこの関数は以下の形を取らなければならないとわかる．

$$e_\mu^2\Delta'_{\rho\sigma}(q,\mu,e_\mu) = \frac{\eta_{\rho\sigma} d(q^2/\mu^2, e_\mu)}{q^2} + [\, q_\rho q_\sigma \text{項}\,]\,. \tag{18.8.3}$$

(18.8.3) は μ に依存しないので，ここで $\mu = \sqrt{q^2} \equiv q$ と置くことができ，

$$d(q^2/\mu^2, e_\mu) = d(1, e_q) \tag{18.8.4}$$

となる．

さて，これより $d(q^2/\mu^2, e_\mu)$ の摂動級数について何がわかるかを見てみる．e のベータ関数の展開は，

$$\beta(e) = b_1 e^3 + b_2 e^5 + b_3 e^7 + \ldots \tag{18.8.5}$$

となっている. このため, e_μ のくりこみ群方程式は,

$$e_q^2 = e_\mu^2 - b_1 e_\mu^4 \ln\frac{q^2}{\mu^2} - b_2 e_\mu^6 \ln\frac{q^2}{\mu^2} - \left(\frac{b_1 b_2}{2}\ln^2\frac{q^2}{\mu^2} + b_3 \ln\frac{q^2}{\mu^2}\right) e_\mu^8 + \ldots \tag{18.8.6}$$

という冪級数解を持つ. d も展開すると,

$$d(1,e) = e^2 + d_1 e^4 + d_2 e^6 + d_3 e^8 + \ldots \tag{18.8.7}$$

となるから,

$$\begin{aligned} d(q^2/\mu^2, e_\mu) &= d(1, e_q) \\ &= e_\mu^2 - \left(b_1 \ln\frac{q^2}{\mu^2} - d_1\right) e_\mu^4 - \left(b_2 \ln\frac{q^2}{\mu^2} - d_2\right) e_\mu^6 \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} b_1 b_2 \ln^2\frac{q^2}{\mu^2} + (b_3 - b_1 d_2)\ln\frac{q^2}{\mu^2} - d_3\right) e_\mu^8 + \ldots \end{aligned} \tag{18.8.8}$$

を得る. $d(q^2/\mu^2, e_\mu)$ の各次数での $\ln(q^2/\mu^2)$ の主要な冪は, それぞれ, $0,1,1,2,3,\ldots$ となっている. また, もし, $d(q^2/\mu^2, e_\mu)$ を e_μ^6 の次数まで計算し, b_1 と b_2 を決めると, すぐに e_μ^8 の主要な対数の係数を$-\frac{1}{2}b_1 b_2$ と書き下すことができる. これはどれもくりこみ群の手法を使わなければとてもわからないことだ.

問題

1. $SU(N)$ ゲージ理論が $SU(N)$ の基本表現に属するスカラー場を持つ場合を考える. ゲージ結合定数のベータ関数を, スカラーのループの寄与も含めて 1 ループの次数まで求めよ. (推薦: 定数の背景場を持った背景場ゲージを使え.)

2. 正の結合定数 g を持つ理論のベータ関数 $\beta(g)$ が $g = g_*$ で単純なゼロ点を持ち, そこで $a > 0$ として $\beta(g) \to a(g_* - g)$ となっているとする. 演算子 $\mathcal{O}$ を含む量の真空期待値に伴う因子 $N_E^{\mathcal{O}\,-1}$ の主要項 $\propto E^{-\gamma^{\mathcal{O}}(g_*)}$ への補正の漸近的振舞いは何か.

3. $\beta(g) = bg^2 + b'g^3 + b''g^4 + \cdots$ の理論では, 結合定数の再定義により係数 b'' をどうにでも変えることができることを示せ.

4. 質量が 100 GeV 以下の全ての知られている荷電クォークとレプトンの効果を入れて, エネルギー 100 GeV での過程を調べるのに使える有効電荷を計算せよ.

5. 量子電磁理論での電子のプロパゲーターにおいて, 4 元運動量が大きいときの漸近的振舞いを計算せよ. (例えば 11.4 節で計算した Z_2 の 1 ループでの値を使ってよい.)

6. $n = 1, \cdots, N$ のスカラー場 $\phi_n(x)$ が $O(N)$ のベクトル表現に属し, 相互作用 $\frac{1}{4}g(\sum_n \phi_n^2)^2$ をする $O(N)$ 不変な理論について, 異常指数 ν を $\epsilon = 4 - d$ についての展開の一次までで計算せよ.

参考文献

1. M. Gell-Mann and F. E. Low, *Phys. Rev.* **95**, 1300 (1954). くりこまれた結合定数の定義には自由度があることはそれより多少前に, E. C. G. Stueckelberg and A. Peterman, *Helv. Phys. Acta* **26**, 499 (1953) によって知られていた. (彼らはまた, 「くりこみ群」という不幸な言葉も導入した.) しかし, それが非常に高いエネルギーや非常に低いエネルギーでの物理的過程の計算にとってどのように役に立つかは全く説明されていない. ゲルマンとローの仕事の後, くりこみ群は, さらに N. N. Bogoliubov and

D. V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields* (Interscience, New York, 1959): VIII 章と, その参考文献において更に発展させられた. 素粒子論においては, くりこみ群への興味は 1970 年に, C. G. Callan, *Phys. Rev.* **D2**, 1541 (1970); K. Symanzik, *Commun. Math. Phys.* **18**, 227 (1970); C. G. Callan, S. Coleman, and R. Jackiw, *Ann. of Phys.* (New York), **59**, 42 (1970) などによって復活した.

2. K. G. Wilson, *Phys. Rev.* **B4**, 3174, 3184 (1971); *Rev. Mod. Phys.* **47**, 773 (1975).

3. J. C. Collins, *Phys. Rev.* **D10**, 1213 (1974).

3*a*. R. Jost and J. M. Luttinger, *Helv. Phys. Acta* **23**, 201 (1950).

4. これは 1994 年に素粒子データ・グループによって引用された値だ. より最近の計算は, G. Altarelli, CERN preprint CERN-TH-95/203 にまとめられている. これは, *Proceedings of the Workshop on Physics at DAΦNE, April 1995* に発表予定だ. これらのより最近の $\alpha^{-1}(m_Z)$ の値は, 128.89 から 129.08 の範囲にある.

4*a*. S. Coleman and E. Weinberg, *Phys. Rev.* **D7**, 1888 (1973).

4*b*. L. D. Landau, *Niels Bohr and the Development of Physics* (Pergamon Press, New York, 1955) p. 52 とその参考文献.

4*c*. S. L. Adler, C. G. Callan, D. J. Gross, and R. Jackiw, *Phys. Rev.* **D6**, 2982 (1972); M. Baker and K. Johnson, *Physica* **96A**, 120 (1979).

4*d*. 議論と参考文献には, J. Glimm and A. Jaffe, *Quantum Physics – A Functional Integral Point of View*, 第 2 版 (Springer-Verlag,

New York, 1987) 21.6 節; R. Fernandez, J. Fröhlich, and A. D. Sokal, *Random Walks, Critical Phenomena, and Triviality in Quantum Field Theory* (Springer-Verlag, Berlin, 1992) 15 章を見よ.

5. S. Weinberg, *General Relativity*, S. W. Hawking, W. Israel 編 (Cambridge University Press, Cambridge, 1979) p. 790.

6. S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D8**, 3497 (1973).

7. 元の計算は, K. G. Wilson and M. E. Fisher, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 240 (1972); K. G. Wilson, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 548 (1972) にある. 概説としては K. G. Wilson and J. Kogut, *Phys. Rep.* **12C**, No. 2 (1974); M. E. Fisher, *Rev. Mod. Phys.* **46**, 597 (1974); E. Brézin, J. C. Le Guillou, and J. Zinn-Justin, *Phase Transitions and Critical Phenomena*, C. Domb, M. S. Green 編 (Academic Press, London, 1975) を見よ.

8. 例えば, P. M. Chaikin and T. C. Lubensky, *Principles of Condensed Matter Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995) p. 231 を見よ.

8*a*. E. Brézin, J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, and B. G. Nickel, *Phys. Lett.* **44A**, 227 (1973); K. G. Wilson and J. Kogut, 参考文献 7 の 8 節.

9. G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B61**, 455 (1973); *Nucl. Phys.* **B82**, 444 (1973). 本書での導出はト・フーフトのものを多少簡単化したものだ.

10. O. W. Greenberg, *Phys. Rev. Lett.*, **13**, 598 (1964); M. Y. Han and Y. Nambu, *Phys. Rev.* **139**, B1006 (1965); W. A. Bardeen,

H. Fritzsch, and M. Gell-Mann, *Scale and Conformal Invariance in Hadron Physics*, R. Gatto 編 (Wiley, New York, 1973).

11. M. Gell-Mann, *Phys. Lett.* **8**, 214 (1964); G. Zweig, CERN preprint TH401 (1964).

12. D. J. Gross and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.*, **30**, 1343 (1973).

13. H. D. Politzer, *Phys. Rev. Lett.*, **30**, 1346 (1973)

14. E. D. Bloom *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 930 (1969); M. Breidenbach 他, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 933 (1969); J. L. Friedman and H. W. Kendall, *Annual Reviews of Nuclear Science* **22**, 203 (1972).

15. A. Zee, 未発表.

16. G. 't Hooft, 未発表.

17. S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D8**, 605 (1973).

18. D. J. Gross and F. Wilczek, *Phys. Rev.* **D8**, 3633 (1973); S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **31**, 494 (1973).

19. 同様なアイデアは, 漸近的自由性の発見の前に以下の文献で述べられていた. H. Fritzsch, M. Gell-Mann, and H. Leutwyler, *Phys. Lett.* **47B**, 365 (1973).

20. G. Hanson *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1609 (1975); R. F. Schwitters, *Proceedings of the International Conference on Lepton and Photon Interactions at High Energy at Stanford, 1975*, W. T. Kirk 編 (Stanford Linear Accelerator Center, Stanford, 1975) p. 5; G. Hanson, Stanford Linear Accelerator Center Report SLAC-PUB-1814 (1976), 未発表.

21. G. Sterman and S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 1436 (1977).

22. J. Ellis, M. K. Gaillard, and G. G. Ross, *Nucl. Phys.* **B111**, 253 (1976).

23. E. Eichten, K. Lane, and M. Peskin, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 811 (1983).

24. 概説としては, I. Hinchliffe, 'Review of Particle Properties,' *Phys. Rev.* **D50**, 1177 (1994) 25 節を見よ.

25. G. Altarelli, *Proceedings of the Rencontres de Hanoi*, CERN preprint CERN-PPE/94-71 (1994).

26. K. Abe *et al.* (SLD collaboration), *Phys. Rev.* **D51**, 962 (1995). 初期の Z^0 のハドロン崩壊のまとめは, M. Shifman, *Mod. Phys. Lett.* **A10**, 605 (1995) にあり, $\alpha_s(m_Z) = 0.125 \pm 0.005$ の値を与えている. これは, $\Lambda \approx 500$ MeV に相当する.

第 19 章

大域的対称性の自発的破れ

今世紀の物理学の多くは, 第 1 に 1905 年のアインシュタインの特殊相対論の時空対称性, 次に 1930 年代の近似的な $SU(2)$ アイソスピン対称性のような内部対称性という具合に, 対称性原理の上に構築されてきた. したがって素粒子のスペクトルの検討から推察しうる対称性を越える内部対称性が存在することが 1960 年代に発見されたときには興奮に包まれた. 基礎になる理論の厳密なまたは近似的な対称性の中で, 理論の物理的状態の対称性変換としては実現しておらず, 特に真空を不変に保たないという意味で「自発的に破れている」対称性が存在する. その突破口は強い相互作用の破れた近似的な大域的 $SU(2) \times SU(2)$ 対称性の発見だった. これは 19.3 節で詳しく議論する. その直後には電弱相互作用の厳密だが自発的に破れた局所的 $SU(2) \times U(1)$ 対称性が発見された. これはより一般的な破れた局所対称性とともに 21 章で取り上げる. この章では破れた大域的対称性の一般的な議論から始めて, 物理的な例に進む.

19.1 縮退した真空

自発的対称性の破れの例は身近に存在する. 椅子を考えよう. 椅子の原子を支配する方程式は回転対称だが, これらの方程式の解である実際の椅子は空間的に特定の方向を持っている. ここでは椅子のような物体による対称性の破れにそれほど興味があるわけではなくて, 関心があるのは現実的な場の量子論の基底状態すなわち真空の対称性の破れだ.

場の理論における自発的対称性の破れは常に真空状態の縮退を伴っている. 例えば, 作用と, 場を積分する際に使われる測度との対称性変換で, スカラー場 $\phi_n(x)$ に線形に作用する以下の変換を考える.

$$\phi_n(x) \to \phi'_n(x) = \sum_m L_{nm}\phi_m(x)\ . \tag{19.1.1}$$

(ϕ_n は基本粒子である必要はない. $\bar{\psi}\Gamma_n\psi$ のような複合体であってもよい.) 16.4 節で見たように, 量子論的有効作用 $\Gamma[\phi]$ は同じ対称性,

$$\Gamma[\phi] = \Gamma[L\phi] \tag{19.1.2}$$

を持つ. 真空では, $\phi(x)$ の期待値は真空エネルギー $-\Gamma[\phi]$ を最小にする値でなければならない. 例えばそれを $\phi(x) = \bar{\phi}$ (定数) とする. しかしもし $L\bar{\phi} \neq \bar{\phi}$ なら, この真空は一意的ではない. なぜなら $-\Gamma[\phi]$ は $\phi = L\bar{\phi}$ と $\phi = \bar{\phi}$ で同じ値を持つからだ. 対称性変換 (19.1.1) が反転 $\phi \to -\phi$ という簡単で特殊な場合に, $-\Gamma(\phi)$ が ϕ のゼロでない値 $\bar{\phi}$ で最小値をとるなら, それは $\bar{\phi}$ および $-\bar{\phi}$ の二つの値で最小値を持ち, 各々は対称性が破れた状態に対応する.

そのような場合に対称性が破れていると結論することはまだできない. なぜなら, 本当の真空は ϕ_m が様々な期待値を持つ真空状態の線形の重ね合わせで, それが対称性を保存するという可能性があるからだ. 例えば, $\phi \to -\phi$ の対称性を持つ理論で, $\Gamma(\phi)$ が ϕ のゼロでない値 $\bar{\phi}$ で

最小値を持つとしよう．このとき，本当の真空は，Φ が期待値 $\bar{\phi}$ と $-\bar{\phi}$ とを持つ状態 $|\mathrm{VAC},\pm\rangle$ のどちらか一方であると言えるだろうか? 本当の真空は，$\phi \to -\phi$ のもとでの対称性を満たす $|\mathrm{VAC},+\rangle + |\mathrm{VAC},-\rangle$ のような線形結合であるかもしれない．変換 $\phi \to -\phi$ のもとでの対称性より，ハミルトニアンの真空行列要素は，

$$\langle \mathrm{VAC},+|H|\mathrm{VAC},+\rangle = \langle \mathrm{VAC},-|H|\mathrm{VAC},-\rangle \equiv a$$

(a は実) と，

$$\langle \mathrm{VAC},+|H|\mathrm{VAC},-\rangle = \langle \mathrm{VAC},-|H|\mathrm{VAC},+\rangle \equiv b$$

(b は実) という関係式を満たす．したがって，ハミルトニアンの固有状態は $|\mathrm{VAC},+\rangle \pm |\mathrm{VAC},-\rangle$ でそのエネルギーは $a \pm |b|$ だ．これらのエネルギー固有状態は対称性 $\phi \to -\phi$ のもとで (符号を除いて) 不変だ．実際，同じことは椅子の場合にも起こる．孤立した椅子の量子力学的基底状態は実際には回転不変だ．なぜならそれは角運動量量子数がゼロの状態なので，したがって空間的に特定の方向は持たないからだ．

自発的対称性の破れは実際には無限に大きな理想化された系でしか起こらない．椅子について対称性の破れが起こるのは，椅子が巨視的な慣性モーメント I を持ちその基底状態はエネルギーが $\hbar^2/I$ の程度の微小な量だけの間隔を持つ一連の回転励起状態の一部だからだ．このため椅子の状態ベクトルは外部からの摂動に対して敏感に反応する．たとえ非常に弱い外場でもこれらの回転レベルのエネルギー差に比べればはるかに大きなエネルギーのシフトを引き起こす．その結果，どのような回転非対称な外場が働いても，特定の角運動量量子数を持った椅子の基底状態や他の全ての状態でも急激に他の角運動量量子数を持った成分が増大する．外からの小さな摂動に対して比較的安定な椅子の状態は，明確な角運動量量子数を持った状態ではなく，むしろ明確な方向を持った状態であり，そのような状態では基礎にある

理論の回転対称性は破れている.

真空についてはまた, 自発的対称性の破れは系の大きなサイズ, 特に空間の大きな体積に関係している. 上記の反転対称性の例では, ハミルトニアンの非対角行列要素 b は, $\phi = \bar{\phi}$ での最小点から $\phi = -\bar{\phi}$ での最小点へとくぐり抜ける場の配位についての積分を含むので, 対角行列要素 a に比べて $\exp(-C\mathcal{V})$ の形をした障壁透過因子だけ小さい. ここで $\mathcal{V}$ は空間の体積, C は理論の微視的パラメータに依存する正の定数だ.* よって二つのエネルギー固有状態 $|\mathrm{VAC},+\rangle \pm |\mathrm{VAC},-\rangle$ は任意の巨視的体積で本質的に縮退しており, ϕ のどのような奇汎関数の摂動によっても強く混じり合う. たとえそのような摂動 H' が非常に弱くても, その対角要素 $\langle \mathrm{VAC},\pm|H'|\mathrm{VAC},\pm\rangle$ には H か摂動のどちらかの指数関数的に小さい非対角要素に比べてはるかに大きな差が生じる. よって摂動を含むハミルトニアンの真空固有状態は, 摂動を対角化する対称性が破れた状態 $|\mathrm{VAC},\pm\rangle$ のどちらか一方に非常に近く, 不変な状態 $|\mathrm{VAC},+\rangle \pm |\mathrm{VAC},-\rangle$ には近くない. 非常に小さい摂動の場合, 状態 $|\mathrm{VAC},\pm\rangle$ のどちらが本当の真空だろうか? これは摂動に依るが, この二つの状態は元のハミルトニアンの対称性変換により関係しているので, このことは重要ではない. というのは, 摂動が十分に小さければどの観測者にもその差は分からないからだ.

場の異なる期待値を持つ真空状態間の行列要素は体積無限大の空間では厳密にゼロになる.[1] 体積無限大の場合, 一般的な真空状態 $|v\rangle$ は運動量ゼロ状態,

$$\mathbf{P}|v\rangle = 0 \tag{19.1.3}$$

で, かつこれが離散的な運動量固有値の状態として定義できる. (これ

---

*例えば, 典型的な波動力学の障壁透過の問題との類似から, $-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)$ の形のラグランジアン密度の場合には $C = \int_{-\bar{\phi}}^{+\bar{\phi}} \sqrt{2V(\phi)}\, d\phi$ が得られる. ここでは非対角行列要素 b をわざわざ計算することはしない. なぜならこの後すぐに一般的な議論をして体積無限大の場合にはそれがゼロになることを示すからだ.

は 1 粒子状態または多粒子状態を排除する. それらの状態でのゼロ運動量値は体積無限大の空間では常に連続的な運動量値の一部分になっている.) 一般にはそのような状態がいくつか存在しうる. それらは通常離散的な組に展開できるので, ここでの記法ではそれらがあたかも離散的であるかのように扱う. それらを正規直交に選ぶ.

$$\langle u|v\rangle = \delta_{uv} \,. \tag{19.1.4}$$

同時刻の局所的なエルミート演算子の積のこれらの状態間での行列要素は全て, 以下のように状態についての和で表される.

$$\langle u|A(\mathbf{x})\,B(0)|v\rangle = \sum_w \langle u|A(0)|w\rangle\,\langle w|B(0)|v\rangle + \int d^3p \sum_N \langle u|A(0)|N,\mathbf{p}\rangle\,\langle N,\mathbf{p}|B(0)|v\rangle e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \,. \tag{19.1.5}$$

ここで $|N,\mathbf{p}\rangle$ は明確な 3 元運動量 $\mathbf{p}$ を持つ正規直交連続状態の組で, $|v\rangle$ と合わせて物理的全ヒルベルト空間を張る. (N はここでは連続的な添字と離散的な添字の両方を含む. また, 時間の引数は省略している.) $|N,\mathbf{p}\rangle$ は運動量演算子 $\mathbf{P}$ の連続スペクトルに属するので, 行列要素の $\mathbf{p}$ 依存性は十分滑らか (すなわち, ルベーク積分可能) でリーマン・ルベークの定理[2]を使うことができ, よって $\mathbf{p}$ についての積分は $|\mathbf{x}|\to\infty$ でゼロになると, 証明抜きで仮定する. この極限で,

$$\langle u|A(\mathbf{x})\,B(0)|v\rangle \xrightarrow{|\mathbf{x}|\to\infty} \sum_w \langle u|A(0)|w\rangle\,\langle w|B(0)|v\rangle \,, \tag{19.1.6}$$

および, 同様に,

$$\langle u|B(0)\,A(\mathbf{x})|v\rangle \xrightarrow{|\mathbf{x}|\to\infty} \sum_w \langle u|B(0)|w\rangle\,\langle w|A(0)|v\rangle \tag{19.1.7}$$

が得られる. しかし因果律より同時刻交換子 $[A(\mathbf{x}), B(0)]$ は $\mathbf{x}\neq 0$ でゼロになる (5.1 節を見よ) ので, 行列要素 (19.1.6) と (19.1.7) とは等

しく, したがってエルミート行列 $\langle u|A(0)|v\rangle$, $\langle u|B(0)|v\rangle$ 等は全て相互に交換しなければならない. つまりそれらは全て同時対角化可能だ. 必要ならこの基底に移って, 理論のあらゆるエルミートな局所的演算子 $A(\mathbf{x})$ は,

$$\langle u|A(0)|v\rangle = \delta_{uv}\, a_v \tag{19.1.8}$$

を満たすことがわかる. ここで a_v は状態 $|v\rangle$ での A の期待値で実数だ. したがって体積無限大では, 局所的演算子から作ったどのようなハミルトニアンも異なる真空 $|v\rangle$ の間で行列要素をとるとゼロになる. ハミルトニアンの非対角項がなければ, 対称性の演算で結びつく任意の二つの $|v\rangle$ は縮退する. そのような局所的演算子から作った対称性を破る摂動は同じ基底で対角なので, それが作り出す基底状態は $|v\rangle$ のどれか一つであって, それらの線形結合ではない.

場に依存する小さな摂動に対して安定な真空状態 $|v\rangle$ がクラスター分解条件 (4 章を見よ) を満たす真空状態でもあるという事実は我々の確信を深めてくれる. この原理は, 物理的真空状態 $|\mathrm{VAC}\rangle$ が,

$$\langle \mathrm{VAC}|A(\mathbf{x})B(0)|\mathrm{VAC}\rangle \xrightarrow[\mathbf{x}\to\infty]{} \langle \mathrm{VAC}|A(\mathbf{x})|\mathrm{VAC}\rangle\, \langle \mathrm{VAC}|B(0)|\mathrm{VAC}\rangle \tag{19.1.9}$$

を満たすことを要求する. この条件は真空状態 $|\mathrm{VAC}\rangle$ を (19.1.8) で定義された基底での状態 $|v\rangle$ のどれか一つにとれば満たされるが, $|v\rangle$ のいくつかの一般的な線形結合にとると満たされない.

19.2　ゴールドストン・ボゾン

ここでは自発的に破れた連続的な対称性に限定する. この場合, (21 章で考察する重要な例外が一つあるが) 物理的粒子のスペクトルは破れた各対称性毎に質量とスピンとがゼロの粒子を 1 個ずつ含まねばならないという定理が存在する. そのような粒子はゴールドストン・ボ

ゾン (あるいは南部・ゴールドストン・ボゾン) と呼ばれ, ゴールドストン[3]と南部[4]による特殊な模型で最初に登場した. ゴールドストン・ボゾンの存在の一般的な証明はその後ゴールドストン, サラム, と私自身[5]によって二つ与えられた. この節ではこれら二つの証明を両方とも提示し, その後ゴールドストン・ボゾンの性質を考察する.

作用と測度は, 一組のエルミート・スカラー場 $\phi_n(x)$ (基本粒子の場でも複合粒子の場でもよい) を線形微小変換,

$$\phi_n(x) \to \phi_n(x) \; + \; i\epsilon \sum_m t_{nm} \phi_m(x) \tag{19.2.1}$$

する連続的な対称性のもとで不変だとする. ここで it_{nm} は有限次元の実行列だ. 16.4 節で見たように, この変換のもとで有効作用も不変だ.

$$\sum_{n,m} \int \frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi_n(x)} \, t_{nm} \phi_m(x) \, d^4x = 0 \, . \tag{19.2.2}$$

定数場 ϕ_n の並進不変な理論に限ることにすると, 16.2 節で見たように, 有効作用は以下の形をとる.

$$\Gamma[\phi] = -\mathcal{V} V(\phi) \, . \tag{19.2.3}$$

ここで $\mathcal{V}$ は時空の体積で $V(\phi)$ は有効ポテンシャルとして知られている. すると (19.2.2) は,

$$\sum_{n,m} \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi_n} \, t_{nm} \, \phi_m = 0 \tag{19.2.4}$$

と書くことができる. この対称性の要求を ϕ_ℓ に関して再度微分して得られる以下の形で使おう.

$$\sum_n \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi_n} \, t_{n\ell} + \sum_{n,m} \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_\ell} \, t_{nm} \phi_m = 0 \, . \tag{19.2.5}$$

ここで ϕ_n が $V(\phi)$ の最小点になっている場合, つまり, 真空期待値 $\bar{\phi}_n$ の場合に限定する. この最小点で $V(\phi)$ は停留するので (19.2.5) の第

1 項はゼロだ. よって,

$$\sum_{n,m} \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial\phi_n \partial\phi_\ell}\bigg|_{\phi=\bar{\phi}} t_{nm}\bar{\phi}_m = 0 \tag{19.2.6}$$

となる. 16.1 節の一般的な結果から, (19.2.6) に現れる 2 回微分は, ちょうど 4 元運動量がゼロで添字が n と ℓ の外線を持つ全ての連結 1 粒子既約な運動量空間でのファインマン・ダイアグラムの和だ. 16.1 節の最後に示したように, それは運動量空間でのプロパゲータの逆と,

$$\frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial\phi_n \,\partial\phi_\ell} = \Delta^{-1}_{n\ell}(0) \tag{19.2.7}$$

で関係しているので, (19.2.6) より,

$$\sum_{nm} \Delta^{-1}_{n\ell}(0) t_{nm}\bar{\phi}_m = 0 \tag{19.2.8}$$

が得られる. したがって, 対称性が破れていて $\sum_m t_{nm}\bar{\phi}_m$ がゼロでないなら, これは $\Delta^{-1}_{n\ell}(0)$ の固有ベクトルであり, その固有値はゼロだ. そのような固有ベクトルの存在は, $\Delta_{n\ell}(q)$ が $q^2 = 0$ で極を持つことを意味する. $q^2 = 0$ での極の留数の階数は, t が理論の連続的な対称性の全ての生成子を動くとして, ベクトル $t\bar{\phi}$ の張る空間の次元に等しい. 大ざっぱにいえば, 独立な破れた対称性の各々について 1 個ずつの質量ゼロ粒子が存在する.

破れた対称性の典型的な例では, ラグランジアンは N 個の実スカラー場 ϕ_n の組を含み, 以下の形をとる.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\sum_n \partial_\mu\phi_n\partial^\mu\phi_n - \frac{\mathcal{M}^2}{2}\sum_n \phi_n\phi_n - \frac{g}{4}\left(\sum_n \phi_n\phi_n\right)^2 . \tag{19.2.9}$$

これは ϕ_n を成分とする N ベクトルの回転から成る $O(N)$ 群のもとで不変だ. 定数場の場合, 樹木近似での有効ポテンシャルは単にラグ

ランジアン密度の非微分項に負符号を付けたものだ.

$$V(\phi) \simeq \frac{\mathcal{M}^2}{2} \sum_n \phi_n \phi_n + \frac{g}{4} \left(\sum_n \phi_n \phi_n \right)^2 . \tag{19.2.10}$$

通常どおり g は正定値とする. (そうでなければ $V(\phi)$ の最小点がたとえあったとしても, それは摂動論が正当化できる範囲外にあることになる.) もし $\mathcal{M}^2$ も正なら, $V(\phi)$ の最小点は $\phi = 0$ で, それは $O(N)$ のもとで不変だ. 他方, $\mathcal{M}^2 < 0$ の場合には最小点は,

$$\sum_n \bar{\phi}_n \bar{\phi}_n = -\mathcal{M}^2 / g \tag{19.2.11}$$

を満たす点 $\bar{\phi}_n$ だ. すると樹木近似での質量行列は,

$$\begin{aligned} M_{nm}^2 &= \left. \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_m} \right|_{\phi = \bar{\phi}} \\ &= \mathcal{M}^2 \delta_{nm} + g \delta_{nm} \sum_\ell \bar{\phi}_\ell \bar{\phi}_\ell + 2g \bar{\phi}_n \bar{\phi}_m \\ &= 2\, g\, \bar{\phi}_n\, \bar{\phi}_m \end{aligned} \tag{19.2.12}$$

となる. この行列の 1 個の固有ベクトル $\bar{\phi}_n$ はゼロでない固有値,

$$m^2 = 2\, g \sum_n \bar{\phi}_n \bar{\phi}_n = 2 |\mathcal{M}^2| \tag{19.2.13}$$

を持ち, $\bar{\phi}$ と直交する $N-1$ 個の固有ベクトルは固有値ゼロを持つ. $N-1$ 個のゴールドストン・ボゾンしか現れない理由は, $O(N)$ は破れて $O\,(N-1)$ ($\bar{\phi}$ を不変に保つ $O(N)$ の部分群) になるので, 独立な破れた対称性の数は $O(N)$ の次元から $O(N-1)$ の次元を引いた数,

$$\frac{1}{2} N(N-1) - \frac{1}{2}(N-1)(N-2) = N - 1 \tag{19.2.14}$$

だからだ.

有効作用の形式を使わないでゴールドストン・ボソンの存在を証明する別の方法がある. 7 章で見たように, 作用のどのような連続的な対称性も保存カレント J^μ,

$$\frac{\partial J^\mu(x)}{\partial x^\mu} = 0\,, \tag{19.2.15}$$

とそれに付随する対称変換を引き起こす荷電 Q,

$$Q = \int d^3x\, J^0(\mathbf{x},0)\,, \tag{19.2.16}$$

$$\Big[Q, \phi_n(x)\Big] = -\sum_m t_{nm}\phi_m(x)\,. \tag{19.2.17}$$

の存在を導く. (19.2.15)-(19.2.17) のような演算子の関係は自発的対称性の破れの影響を受けない. 破れは物理的状態の性質に現れる. ここでカレントと場の交換子の真空期待値を考察する. 中間状態について足し上げると, これは,

$$\Big\langle\Big[J^\lambda(y),\, \phi_n(x)\Big]\Big\rangle_{\text{VAC}}$$
$$= (2\pi)^{-3}\int d^4p\Big[\rho_n^\lambda(p)\,e^{ip\cdot(y-x)} \;-\; \tilde{\rho}_n^\lambda(p)\,e^{ip\cdot(x-y)}\Big] \tag{19.2.18}$$

となる. ここで, 並進不変性を使って,

$$(2\pi)^{-3}i\rho_n^\lambda(p) = \sum_N \langle\text{VAC}|J^\lambda(0)|N\rangle\,\langle N|\phi_n(0)|\text{VAC}\rangle\delta^4(p-p_N)\,, \tag{19.2.19}$$

$$(2\pi)^{-3}i\tilde{\rho}_n^\lambda(p) = \sum_N \langle\text{VAC}|\phi_n(0)|N\rangle\,\langle N|J^\lambda(0)|\text{VAC}\rangle\delta^4(p-p_N) \tag{19.2.20}$$

と定義している. 通常 J^λ も ϕ_n もエルミート演算子にとり, その場合には (19.2.19) と (19.2.20) は複素共役の関係,

$$\rho_n^\lambda(p) = -\tilde{\rho}_n^{\lambda *}(p) \tag{19.2.21}$$

にあるが, ここではこれを仮定しない.

ローレンツ不変性より ρ と $\tilde{\rho}$ は,

$$\rho_n^\lambda(p) = p^\lambda \rho_n(-p^2)\theta(p^0) \; , \tag{19.2.22}$$

$$\tilde{\rho}_n^\lambda(p) = p^\lambda \tilde{\rho}_n(-p^2)\theta(p^0) \tag{19.2.23}$$

の形をとらなければならない. (因子 $\theta(p^0)$ は, $p^0 > 0$ のとき $+1$ でそれ以外のときゼロだ. この因子は p_N が物理的状態の 4 元運動量だという事実から要求される.) これより,

$$\left\langle \left[J^\lambda(y), \phi_n(x) \right] \right\rangle_{\text{VAC}} = \frac{\partial}{\partial y_\lambda} \int d\mu^2 \Big[\rho_n(\mu^2)\Delta_+(y-x;\mu^2) + \tilde{\rho}_n(\mu^2)\Delta_+(x-y;\mu^2) \Big] \tag{19.2.24}$$

が得られる. ここで Δ_+ は以下のなじみの関数だ.

$$\Delta_+(z;\mu^2) = (2\pi)^{-3} \int d^4p\, \theta(p^0)\, \delta(p^2+\mu^2)\, e^{ip\cdot z} \; . \tag{19.2.25}$$

5 章で指摘したように, ローレンツ不変性より $\Delta_+(z;\mu^2)$ は z^2, μ^2, $\theta(z^0)$ にのみ依存し, さらに $z^2 > 0$ の場合には z^2 と μ^2 のみに依存することしか許されない. したがって, $\Delta_+(x-y;\mu^2)$ と $\Delta_+(y-x;\mu^2)$ は $x-y$ が空間的なときには等しく, よってこの場合,

$$\left\langle \left[J^\lambda(y),\, \phi_n(x) \right] \right\rangle_{\text{VAC}} = \frac{\partial}{\partial y_\lambda} \int d\mu^2 \Big[\rho_n(\mu^2) + \tilde{\rho}_n(\mu^2) \Big] \Delta_+(y-x;\mu^2) \tag{19.2.26}$$

となる. しかし $x-y$ が空間的なときには全ての交換子はゼロになるので,

$$\rho_n(\mu^2) = -\tilde{\rho}_n(\mu^2) \tag{19.2.27}$$

となる. したがって (19.2.24) より一般的な x と y について,

$$\left\langle \left[J^\lambda(y),\, \phi_n(x) \right] \right\rangle_{\text{VAC}} = \frac{\partial}{\partial y_\lambda} \int d\mu^2 \rho_n(\mu^2) \Big[\Delta_+(y-x;\mu^2) - \Delta_+(x-y;\mu^2) \Big] \tag{19.2.28}$$

が得られる. (19.2.21) が成り立てば, (19.2.27) より $\rho_n(p)$ は実だ.

次に $J^\lambda(y)$ が保存する事実を使おう. 微分 $\partial/\partial y^\lambda$ を (19.2.28) の両辺に施して, なじみの方程式,

$$(\Box_y - \mu^2)\,\Delta_+(y-x;\mu^2) = 0 \tag{19.2.29}$$

を使うと, あらゆる x と y について,

$$0 = \int d\mu^2\,\mu^2\rho_n(\mu^2)\left[\Delta_+(y-x;\mu^2) - \Delta_+(x-y;\mu^2)\right] \tag{19.2.30}$$

が成り立ち, よって ($\Delta_+(x-y)$ は $x-y$ が時間的または光錐的な場合には偶でないので),

$$\mu^2\rho_n(\mu^2) = 0 \tag{19.2.31}$$

となる.

普通ならこのことより $\rho_n(\mu^2)$ は全ての μ^2 についてゼロだと結論するだろう. しかし, 破れた対称性の場合にはこれは不可能だ. (19.2.28) で $\lambda = 0$ および $x^0 = y^0 = t$ と置くと,

$$\begin{aligned}\left\langle\left[J^0(\mathbf{y},t),\phi_n(\mathbf{x},t)\right]\right\rangle_{\rm VAC} &= 2i(2\pi)^{-3}\int d\mu^2\rho_n(\mu^2)\\ &\quad\times\int d^4p\sqrt{\mathbf{p}^2+\mu^2}\,e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})}\delta(p^2+\mu^2)\\ &= i\delta^3(\mathbf{y}-\mathbf{x})\int d\mu^2\rho_n(\mu^2)\end{aligned}$$

となる. 積分して (19.2.16) と (19.2.17) を使うと,

$$-\sum_m t_{nm}\langle\phi_m\rangle_{\rm VAC} = i\int d\mu^2\rho_n(\mu^2) \tag{19.2.32}$$

が得られる. (19.2.31) と (19.2.32) とが矛盾しないのは,

$$\rho_n(\mu^2) = i\,\delta(\mu^2)\sum_m t_{nm}\langle\phi_m(0)\rangle_{\rm VAC} \tag{19.2.33}$$

の場合に限られる．(これはエルミート場 ϕ_n については実だ．なぜならこの場合 (19.2.1) より t_{nm} は虚数であることが要求されるからだ.) したがって対称性が破れている限り，$\rho_n(\mu^2)$ はゼロになることはできず，かわりに $\delta(\mu^2)$ に比例する項だけから成る．そのような項は明らかに質量ゼロ粒子を持つ理論でのみ生じ得る．なぜならそれ以外の理論では重心系でのエネルギーの 2 乗 $-p_N^2$ のスペクトルはゼロにまで広がることはないからだ．さらにデルタ関数 $\delta(\mu^2)$ は質量ゼロの 1 粒子状態からのみ生じることができる．これは，多粒子状態は $\mu^2 = 0$ まで続く連続スペクトルに寄与するからだ．状態 $\phi_n(0)|\text{VAC}\rangle$ は回転不変なので，$\langle N|\phi_n(0)|\text{VAC}\rangle$ はゼロでないヘリシティを持つ任意の状態 N についてゼロでなければならない．また $\langle\text{VAC}|J^0|N\rangle$ は J^0 と異なる固有パリティまたは (破れていない) 内部量子数を持つ任意の状態 N についてゼロになる．こうして，$t_{nm}\langle\phi_n(0)\rangle_{\text{VAC}} \neq 0$ のように破れた対称性はスピン・ゼロ，質量ゼロで J^0 と同じパリティと内部量子数を持つ粒子の存在を要求するという結論に到達する．これはまさにゴールドストン・ボゾンだ．

上記の議論は自発的に破れた対称性が大域的対称性でなく局所的対称性のときには破綻する．ランダウ・ゲージ $\partial_\mu A^\mu = 0$ のようにローレンツ不変なゲージを採用した場合には，量子力学の正定値性の仮定が破られており，軸性ゲージ $A_3^\mu = 0$ のようなゲージを採用した場合には，量子力学の通常の法則は成り立つが明白なローレンツ不変性は失われる．いずれにしてもこれまでの議論は成立しない．21 章で見るように，この例外は単に技術的な事がらではなく，自発的に破れた局所的な対称性の場合はゴールドストン・ボゾンは現れない．

$\rho_n(\mu^2)$ のデルタ関数の係数がゴールドストン・ボゾンの性質とどう関係しているかをもう少し詳しく見るのは有益だ．4 元運動量 p_B^μ を持つスピン・ゼロのボゾン B について，ローレンツ不変性よりカレ

ントの真空と 1 粒子状態との間の行列要素は,

$$\langle \mathrm{VAC}|J^\lambda(x)|B\rangle = i\,\frac{F\,p_B^\lambda\,e^{ip_B\cdot x}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p_B^0}} \tag{19.2.34}$$

の形をとらなければならない. ここで $\mathbf{p}_B$ は B の運動量, また $p_B^0 \equiv |\mathbf{p}_B|$ で, F はエネルギーの次元を持つ定数係数だ. ($p_{B\lambda}p_B^\lambda = 0$ だから, これはカレントの保存と整合的だ.) またスカラー場 $\phi_n(y)$ の 1 粒子状態と真空との間の行列要素は,

$$\langle B|\phi_n(y)|\mathrm{VAC}\rangle = \frac{Z_n\,e^{-ip_B\cdot y}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p_B^0}} \tag{19.2.35}$$

の形だ. ここで Z_n は無次元の定数だ. (19.2.34) と (19.2.35) から,

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-3}i\rho_n(-p^2)p^\lambda\theta(p^0) \equiv \int d^3p_B\langle \mathrm{VAC}|J^\lambda(0)|B\rangle\,\langle B|\phi_n(0)|\mathrm{VAC}\rangle \\ \times\delta^4(p-p_B) \\ = \delta(p^0-|\mathbf{p}|)\,(2\pi)^{-3}(2p^0)^{-1}p^\lambda iFZ_n \\ = \theta(p^0)\,\delta(-p^2)\,(2\pi)^{-3}p^\lambda iFZ_n\end{aligned}$$

が得られ, よって,

$$\rho_n(\mu^2) = FZ_n\,\delta(\mu^2) \tag{19.2.36}$$

となる. (19.2.33) と比較すると,

$$i\,FZ_n = -\sum_m t_{nm}\langle\phi_m(0)\rangle_{\mathrm{VAC}} \tag{19.2.37}$$

が導かれる.

より一般的には, 生成子 t_a とカレント J_a^μ を持ついくつかの対称性が破れているかも知れない. それらは t_a のどの線形結合をとっても破れていないものはないという意味で独立だとする. これらの各々に, ゴールドストン・ボゾン $|B_a\rangle$ が存在し, Z_{an} と F_{ab} を,

$$\langle \mathrm{VAC}|J_a^\lambda(x)|B_b\rangle = i\,\frac{F_{ab}p_B^\lambda e^{ip_B\cdot x}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p_B^0}} \tag{19.2.38}$$

$$\langle B_a|\phi_n(y)|\mathrm{VAC}\rangle = \frac{Z_{an}\, e^{-ip_B\cdot y}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p_B^0}} \tag{19.2.39}$$

で定義できる. (19.2.37) は各 a について成り立つので,

$$i\sum_b F_{ab}Z_{bn} = -\sum_m [t_a]_{nm}\langle\phi_m(0)\rangle_{\mathrm{VAC}} \tag{19.2.40}$$

となる. 例えば, 前に議論した $O(N)$ の例では, 基底を調節して真空期待値が次のとおり 1 方向を向くようにできる.

$$\bar{\phi}_m \equiv \langle\phi_m(0)\rangle_{\mathrm{VAC}} = v\delta_{m1}\ . \tag{19.2.41}$$

$N-1$ 個の破れた対称性の生成子 t_a $(a=2\cdots N)$ は $1-a$ 平面の微小回転の生成子として定義できる. 規格化を便利なように選ぶと, これらのゼロでない要素は,

$$[t_a]_{1a} = -[t_a]_{a1} = i \tag{19.2.42}$$

となる (a についての和はとらない). 破れていない $O(N-1)$ 対称性のもとで $N-1$ 個のゴールドストン・ボゾンはベクトル表現に従って変換するが, その対称性より,

$$F_{ab} = \delta_{ab}F\ , \qquad Z_{a1} = 0\ , \qquad Z_{ab} = Z\delta_{ab} \tag{19.2.43}$$

となる. すると (19.2.40) より,

$$FZ = v \tag{19.2.44}$$

でなければならない. 通常 $Z=1$ となる場のくりこみ処法を採用するので, $F=v$ となる. したがって F は対称性の破れの強さの目安になる. すぐに見るように, パラメータ $1/F$ はゴールドストン・ボゾンが相互にあるいは他の粒子と相互作用する強さを決定する.

破れた対称性から, ゴールドストン・ボゾンは単に質量ゼロだという以上のことがわかる. つまり低エネルギーでのそれらの相互作用に

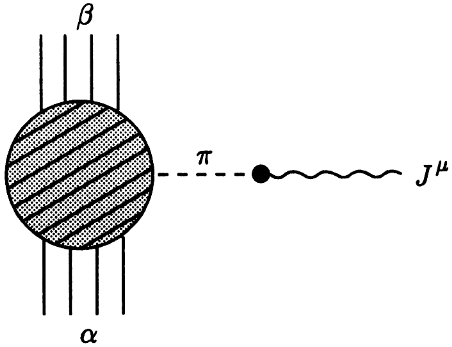


図 19.1: 対称性のカレント $J^\mu(x)$ の, 一般的な状態 α と β との間の行列要素にゴールドストン・ボゾンの内線による極を与えるファインマン・ダイアグラム. ゴールドストン・ボゾンは π で示してある.

強い条件が課される. 最も簡単な場合にこれを見るために, 破れた対称性にともなうカレント $J^\mu(x)$ を考える. 任意の状態 α, β でこのカレントをはさむと,

$$\left\langle \beta | J^\mu(x) | \alpha \right\rangle = e^{iq\cdot x} \left\langle \beta | J^\mu(0) | \alpha \right\rangle \tag{19.2.45}$$

となる. ここで,

$$q^\mu \equiv p_\alpha^\mu - p_\beta^\mu \tag{19.2.46}$$

だ. (19.2.34) で与えられたとおり $J^\mu(x)$ は真空と 1 個のゴールドストン・ボゾンの間でゼロでない行列要素 $|B, \mathbf{q}\rangle$ を持つ. 通常の極の理論 (10 章を見よ) より, 行列要素 (19.2.45) は $q^2 \to 0$ で,*

$$\langle \beta | J^\mu(0) | \alpha \rangle \to \frac{iF\, q^\mu}{q^2}\, M_{\beta\alpha} \tag{19.2.47}$$

*ゴールドストン・ボゾンが基本粒子の場に対応する場合には, (19.2.47) は図 19.1 で示された類のファインマン・ダイアグラムを調べれば得られる. $\alpha \to \beta + B$ の S 行列要素の因子 $i(2\pi)^4$ は B のプロパゲータにともなう因子 $-i(2\pi)^{-4}$ と打ち消し合う. 極の一般論からゴールドストン・ボゾンが複合粒子の場合にも同様のことが成り立つことがわかる.

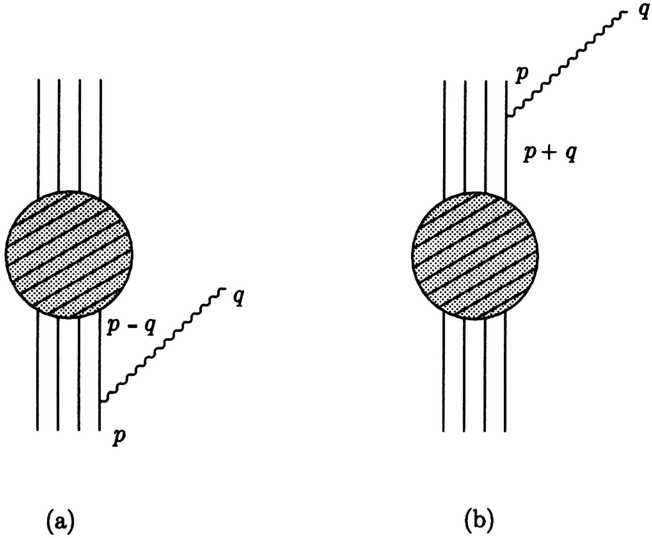


図 19.2: 対称性のカレント $J^\mu(x)$ の, 一般的な状態 α と β との間の行列要素に質量殻に近い内線による極を与えるファインマン・ダイアグラム. 実線は「硬い」外線粒子, 波線はカレント $J^\mu(x)$ の挿入を示す. 斜線を引いた円盤は示された外線を持つダイアグラムの和だ.

の形の極を持つ. ここで $i(2\pi)^4\delta^4(p_\alpha - p_\beta - q)M_{\beta\alpha}/(2\pi)^{3/2}(2q^0)^{1/2}$ は $\alpha \to \beta$ の遷移で 4 元運動量 q のゴールドストン・ボゾンを放出する S 行列要素だ. したがって,

$$\langle\beta|J^\mu(0)|\alpha\rangle \equiv N^\mu_{\beta\alpha} + \frac{iFq^\mu}{q^2}\,M_{\beta\alpha} \tag{19.2.48}$$

と書こう. ここで $N^\mu_{\beta\alpha}$ はカレントの行列要素への極以外の寄与として定義される. (19.2.45) より, カレント J^μ の保存則 $\partial_\mu J^\mu = 0$ は (19.2.48) と q^μ との縮約をとるとゼロになることを要求し, よって,

$$M_{\beta\alpha} = \frac{i}{F}\,q_\mu N^\mu_{\beta\alpha} \tag{19.2.49}$$

が得られる. ここから直接出てくる一つの結果は, $N^\mu_{\beta\alpha}$ が $q \to 0$ で極

を持たなければ，遷移 $\alpha \to \beta$ でゴールドストン・ボゾンを放出する行列要素 $M_{\beta\alpha}$ は $q \to 0$ でゼロになるということだ．これは「アドラー(Adler)のゼロ」と呼ばれている．[6]

実際には，$N^{\mu}_{\beta\alpha}$ が $q = 0$ に極を持つことはしばしばある．これは，カレント $J^{\mu}(x)$ に対応する頂点が過程 $\alpha \to \beta$ の外線に付くかもしれないからだ．(図 19.2 を見よ.) 例えば，4 元運動量 p を持って出て行くかまたは入って来る質量 m の粒子の線に挿入されたカレント J^{μ} によって 4 元運動量 q^{μ} が持ち去られるとき，この頂点をダイアグラムの残りの部分とつなぐ内線は 4 元運動量 $p^{\mu} + q^{\mu}$ または $p^{\mu} - q^{\mu}$ をそれぞれ持つ．したがって，そのプロパゲータは $N^{\mu}_{\beta\alpha}$ に因子，

$$\Big[(p \pm q)^2 + m^2\Big]^{-1} = \Big[\pm 2p\cdot q + q^2\Big]^{-1} \to \pm\frac{1}{2p\cdot q} \qquad (19.2.50)$$

の寄与をする．固定した方向 $\mathbf{q}$ について，(19.2.50) からの 因子 $1/|\mathbf{q}|$ は (19.2.49) の因子 $|\mathbf{q}|$ を打ち消し，$|\mathbf{q}| \to 0$ の極限で有限の ($\mathbf{q}$ の方向に依存する) 結果を生じる．他方，カレント J^{μ} が過程 $\alpha \to \beta$ の内線に付いたダイアグラムの $N^{\mu}_{\beta\alpha}$ への寄与は $|\mathbf{q}| \to 0$ で特異性を持たないので，(19.2.49) の因子 $|\mathbf{q}|$ により消される．したがって (19.2.49) は以下の意味に解釈できる．過程 $\alpha \to \beta$ で非常に低エネルギーのゴールドストン・ボゾンを放出する振幅は，ゴールドストン・ボゾンがその過程の外線からのみ放出されるダイアグラムから計算できる．ただし，ゴールドストン・ボゾンを放出する頂点は (19.2.49) を 1 粒子状態間の遷移に適用して得られるものを使う．

有効相互作用形式を使ってゴールドストン・ボゾン間および他のスカラーとの相互作用について興味深い結果を導くことができる．このために，

$$\langle B_a|\pi_b(x)|\mathrm{VAC}\rangle = \frac{e^{-ip_B\cdot x}\delta_{ab}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p_B^0}} \qquad (19.2.51)$$

を満たす 1 組のくりこまれたゴールドストン・ボゾン場 π_a を定義す

れば, (19.2.39) より以下となる.

$$\phi_n(x) = \sum_a Z_{an}\pi_a(x) + \dots \tag{19.2.52}$$

ここで「...」はゴールドストン・ボゾンを生成しない場を表す. しかし (19.2.40) より, $Z_{an} = \sum_b F^{-1}_{ab}(it_b\bar{\phi})_n$ を得る. したがって N 個の 4 元運動量ゼロのゴールドストン・ボゾン $\pi_{a_1}, \cdots, \pi_{a_N}$ 間のどの反応の振幅も有効相互作用,

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \frac{1}{N!} g_{a_1\cdots a_N}\pi_{a_1}\cdots\pi_{a_N} \tag{19.2.53}$$

から樹木近似で計算される振幅と等しい. ここで以下の定義を使った.

$$g_{a_1\cdots a_N} = \sum_{b_1\dots b_N} F^{-1}_{a_1b_1}\cdots F^{-1}_{a_Nb_N}(it_{b_1}\bar{\phi})_{n_1}\cdots(it_{b_N}\bar{\phi})_{n_N} \times \left.\frac{\partial^N V(\phi)}{\partial\phi_{n_1}\cdots\partial\phi_{n_N}}\right|_{\phi=\bar{\phi}} . \tag{19.2.54}$$

すると $\phi = \bar{\phi}$ での (19.2.4) は, 1 個のゴールドストン・ボゾンの線が真空に消える全ての「タッドポール」ダイアグラムの和はゼロになることを意味し, (19.2.6) は, 4 元運動量ゼロのゴールドストン・ボゾンが任意の他のスカラーに遷移する振幅はゼロになることを意味する. スカラー場について微分を続ければ, これ以上の結果が得られる. 例えば, (19.2.5) の微分より任意の対称性の生成子 t について,

$$\sum_n \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial\phi_n\partial\phi_m} t_{n\ell} + \sum_n \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial\phi_n\partial\phi_\ell} t_{nm} + \sum_{n,k} \frac{\partial^3 V(\phi)}{\partial\phi_n\partial\phi_m\partial\phi_\ell} t_{nk}\phi_k = 0 \tag{19.2.55}$$

が得られる. t を破れた対称性の生成子 t_a の一つにとり, $\phi = \bar{\phi}$ と置き, $(t_b\bar{\phi})_m(t_c\bar{\phi})_\ell$ と縮約し, (19.2.6) を使うと,

$$\sum_{n\,m\,\ell} \left.\frac{\partial^3 V(\phi)}{\partial\phi_n\partial\phi_m\partial\phi_\ell}\right|_{\phi=\bar{\phi}} (t_a\bar{\phi})_n(t_b\bar{\phi})_m(t_c\bar{\phi})_\ell = 0 \tag{19.2.56}$$

が得られる．よって 3 本の 4 元運動量ゼロのゴールドストン・ボゾンの外線を持つ全てのダイアグラムの和はゼロになる．特にこのことは，一般の過程において，ゴールドストン・ボゾンの小さなエネルギーの最低次で，低エネルギーのゴールドストン・ボゾンは低エネルギーのゴールドストン・ボゾンの外線から放出されないことを意味する．

19.3　自発的に破れた近似的対称性

前節では作用の厳密な対称性のうち真空を不変に保たず自発的に破れていると呼ばれるものを取り扱った．今度はそのような理論の作用に対称性を破る小さな項を加えた効果を考察する．そのような自発的に破れた近似的対称性は強い相互作用の理論や，固体物理の幾つかの分野で重要だ．すぐに見るように，近似的対称性の破れから質量ゼロのゴールドストン・ボゾンの出現は導かれないが，小さな質量を持つスピン・ゼロ粒子の出現が導かれる．この粒子はしばしば**擬ゴールドストン・ボゾン** (pseudo-Goldstone boson)[7]と呼ばれる．

ここでは引き続き並進不変な理論を扱う．その場合には有効作用は 1 組の時空に依らないスカラー場の期待値 ϕ_n に依存する有効ポテンシャル $V(\phi)$ を使って (19.2.3) のように表される．生成子 t_α を持つ何組かの近似的な連続対称性を持つ作用の場合，有効ポテンシャルは，

$$V(\phi) = V_0(\phi) + V_1(\phi) \tag{19.3.1}$$

と書ける．ここで $V_0(\phi)$ は不変性の条件,*

$$\sum_{nm} \frac{\partial V_0(\phi)}{\partial \phi_n} (t_\alpha)_{nm} \phi_m = 0 \tag{19.3.2}$$

を満たし，$V_1(\phi)$ は作用における対称性の破れによる小さな補正だ．この摂動によりポテンシャルの最小点は $V_0(\phi)$ の最小点 ϕ_0 からずれて，

*一般的な対称性の生成子は t_α, t_β 等と表すが，独立な破れた対称性の生成子は添字 α が値 a, b 等をとるように表す．

$\bar{\phi} = \phi_0 + \phi_1$ になるとする. ここで ϕ_1 は対称性を破る摂動の 1 次の程度に小さい. すると真空の停留条件は,

$$\left.\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi_n}\right|_{\phi=\phi_0+\phi_1} = 0 \tag{19.3.3}$$

だ. 左辺のゼロ次項はちょうど $[\partial V_0(\phi)/\partial\phi_n]_{\phi=\phi_0}$ で, これは, ϕ_0 が $V_0(\phi)$ の最小点と定義されているので, ゼロだ. したがって 1 次項もゼロでなければならず, よって,

$$\sum_m \left.\frac{\partial^2 V_0(\phi)}{\partial\phi_n \partial\phi_m}\right|_{\phi=\phi_0} \phi_{1\,m} + \left.\frac{\partial V_1(\phi)}{\partial\phi_n}\right|_{\phi=\phi_0} = 0 \tag{19.3.4}$$

が成り立つ. (19.2.6) は V を不変な項 V_0 で置き換えて $\bar{\phi}$ を ϕ_0 で置き換えると成り立つ.

$$\sum_{nl} \left.\frac{\partial^2 V_0(\phi)}{\partial\phi_n \partial\phi_m}\right|_{\phi=\phi_0} (t_\alpha)_{nl}\,\phi_{0\,l} = 0\,. \tag{19.3.5}$$

したがって (19.3.4) に $(t_\alpha\phi_0)_n$ をかけて n について足すと,

$$\sum_n (t_\alpha\phi_0)_n \left.\frac{\partial V_1(\phi)}{\partial\phi_n}\right|_{\phi=\phi_0} = 0 \tag{19.3.6}$$

が得られる. $V(\phi)$ が 1 粒子既約なダイアグラムの母関数であることと, 摂動 V_1 がなければ ϕ_n のゴールドストン成分は $t_\alpha\phi_0$ の方向を向いたものだ ((19.2.33) を見よ) ということに留意すると, (19.3.6) の左辺は擬ゴールドストン・ボゾンが真空に消える「タッドポール」ダイアグラム全ての和に比例する. したがって (19.3.6) は V_1 の 1 次で擬ゴールドストン・ボゾンはタッドポールを持たないという条件に言い換えることができる.

この計算の教訓は, もし (19.3.6) を満たすゼロ次の真空期待値から出発しなければ, たとえ小さな摂動でも $\bar{\phi}$ に大きな変化を生じさせ, ϕ_0 のまわりでの $\bar{\phi}$ の展開を無効にすることだ. 幸い, コンパクトなリー群では (19.3.6) を満たすように ϕ_0 を選ぶことが常に可能だ. こ

れを見るには, 実線形変換 $\phi \to L\phi$ の群のもとでのポテンシャル $V_0(\phi)$ の不変性は, もし ϕ_* がポテンシャルの最小点の一つなら, $L\phi_*$ も最小点であることを意味することに留意すればよい. 連続群の変換については, 変換を $L(\theta)$ とパラメータ化して,

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta^\alpha} L^{-1}(\theta) = iN_{\alpha\beta}(\theta)t_\beta \tag{19.3.7}$$

を満たすようにすることが常に可能だ. ここで $N_{\alpha\beta}$ は群のパラメータ θ_α に依存する正則な行列だ. (実表現では, 実なのは t_α ではなく it_α であることに注意する.) ここで関数 $V_1(L(\theta)\phi_*)$ を考える. 群がコンパクトな場合, θ が群の体積全体を動くとき $L(\theta)\phi_*$ はコンパクトな多様体全体に写像を持つ. $V_1(\phi)$ は, 連続である限り, 任意のコンパクトな表面上に最小点を持たねばならない. この点を $L(\theta_*)\phi_*$ と書く. $V_1(L(\theta)\phi_*)$ の θ_α についての微分は,

$$\frac{\partial V_1(L(\theta)\phi_*)}{\partial \theta_\alpha} = \sum_n \left.\frac{\partial V_1(\phi)}{\partial \phi_n}\right|_{\phi=L(\theta)\phi_*} N_{\alpha\beta}(\theta)\left(it_\beta L(\theta)\phi_*\right)_n \tag{19.3.8}$$

となる. これは最小点 θ_* でゼロでなければならず, N_{ab} は正則なのでこのことより,

$$0 = \sum_n \left.\frac{\partial V_1(\phi)}{\partial \phi_n}\right|_{\phi=L(\theta_*)\phi_*} (t_\beta L(\theta_*)\phi_*)_n \tag{19.3.9}$$

となる. しかしそのとき $\phi_0 = L(\theta_*)\phi_*$ ととれば (19.3.6) は満たされる.

(19.3.6) は**真空整列** (vacuum alignment) 条件[8] と呼ばれる. なぜなら, この条件は真空による対称性の破れの方向をハミルトニアンの対称性を破る項にある意味で揃える効果があるからだ. 例えば, 前節で紹介した $SO(N)$ が $SO(N-1)$ に自発的に破れる場合を考える. 対称性を破る摂動が全くないとき, どの $SO(N-1)$ 部分群が破れずに保たれるかを知る方法はない. なぜなら, もし理論の力学により, ある N ベ

クトル ϕ_{0n} を不変にする, $SO(N)$ の $SO(N-1)$ 部分群のもとで不変な基底状態が得られたなら, $SO(N)$ 回転を施して他の任意の N ベクトルを不変にする $SO(N-1)$ 部分群のもとで不変な基底状態を見つけることができるからだ. $SO(N)$ のもとで, 例えば N ベクトル ϕ_n (必ずしも基本スカラー粒子で構成されるとは限らない) の成分 $\sum_n u_n\phi_n$ のように変換する摂動を加えると, ハミルトニアンは, ベクトル u を不変に保つ回転から成る $SO(N)$ の特定の $SO(N-1)$ 部分群のもとで不変だ. 真空整列条件がなければ, 残った厳密な対称性は, u と真空の対称性を特徴付けるベクトル ϕ_0 との両方を不変に保つ回転から成る $SO(N-2)$ だと考えるかも知れない. しかし, $V_1(\phi)=\sum_n u_n\phi_n$ とすると, 条件 (19.3.6) より本当の真空では全ての $SO(N)$ 生成子 t_α について $\sum_n(t_\alpha\phi_0)_n u_n=0$ が成り立つことがわかる. $SO(N)$ の生成子 t_α は全ての反対称な $N\times N$ 行列の空間を張るので, この条件は ϕ_0 が u と同じ方向を向いていることを要求し, よって破れていない対称性は $SO(N-1)$ であって $SO(N-2)$ ではない.

16.1 節の一般的な結果に従って, 擬ゴールドストン・ボゾンの質量行列 M_{ab} は 1 次までで,

$$M^2_{ab}=\sum_{mn}Z_{an}Z_{bm}\left.\frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial\phi_m\partial\phi_n}\right|_{\phi=\phi_0+\phi_1} \tag{19.3.10}$$

で与えられる. ここで Z_{an} は (19.2.39) で定義される場のくりこみ定数だ. 質量行列 (19.3.10) はゼロ次ではゼロになるので, 1 次項から,

$$M^2_{ab}=\sum_{mn}Z_{an}Z_{bm}\left[\sum_l\left.\frac{\partial^3 V_0(\phi)}{\partial\phi_\ell\partial\phi_m\partial\phi_n}\right|_{\phi=\phi_0}\phi_{1\ell}+\left.\frac{\partial^2 V_1(\phi)}{\partial\phi_m\partial\phi_n}\right|_{\phi=\phi_0}\right] \tag{19.3.11}$$

が得られる. ここで Z_{an} は (19.2.40) のゼロ次近似より以下のように与えられる.

$$Z_{an}=\sum_b F^{-1}_{ab}\,(it_b\phi_0)_n\,. \tag{19.3.12}$$

質量行列 (19.3.11) を計算するには, (19.2.55) の t を破れた対称性の生成子 t_a の一つにとり, $\phi = \phi_0$ と置き, $(t_b\phi_0)_m\phi_{1\ell}$ と縮約する.

$$0 = \sum_{nm\ell} \left.\frac{\partial^3 V_0(\phi)}{\partial\phi_\ell\partial\phi_m\partial\phi_n}\right|_{\phi=\phi_0} \phi_{1\ell}(t_a\phi_0)_n(t_b\phi_0)_m + \sum_{nm} \left.\frac{\partial^2 V_0(\phi)}{\partial\phi_n\partial\phi_m}\right|_{\phi=\phi_0} (t_a\phi_1)_n(t_b\phi_0)_m + \sum_{n\ell} \left.\frac{\partial^2 V_0(\phi)}{\partial\phi_n\partial\phi_\ell}\right|_{\phi=\phi_0} (t_a t_b\phi_0)_n\phi_{1\ell}\,.$$

右辺の第 2 項は (19.2.6) に従ってゼロになるが, 第 3 項は (19.3.4) を使って書き換えることができ,

$$\sum_{nm\ell} \left.\frac{\partial^3 V_0(\phi)}{\partial\phi_\ell\partial\phi_m\partial\phi_n}\right|_{\phi=\phi_0} \phi_{1\ell}(t_a\phi_0)_n(t_b\phi_0)_m = \left.\frac{\partial V_1(\phi)}{\partial\phi_n}\right|_{\phi=\phi_0} (t_a t_b\phi_0)_n \tag{19.3.13}$$

が得られる. (19.3.11) でこの式を使うと, 擬ゴールドストン・ボゾンの質量行列の式は V_1 を用いて, 以下のように表される.

$$M^2_{cd} = -\sum_{ab} F^{-1}_{ca} F^{-1}_{db} \left[(t_a\phi_0)_n(t_b\phi_0)_m \left.\frac{\partial^2 V_1(\phi)}{\partial\phi_m\partial\phi_n}\right|_{\phi=\phi_0} + (t_a t_b\phi_0)_n \left.\frac{\partial V_1(\phi)}{\partial\phi_n}\right|_{\phi=\phi_0} \right]. \tag{19.3.14}$$

これが意味のある質量行列であるためには, 正であることが望ましい. 実際に正であることを見るには, この結果を群のパラメータ θ_a についての微分で書き直すのが便利だ. (19.3.8) を θ_β で微分して, $\theta = \theta_*$ と置き, (19.3.9) と $\phi_0 = L(\theta_*)\phi_*$ を使って,

$$M^2_{ab} = \sum_{cd\alpha\beta} N^{-1}_{c\alpha}(\theta_*)\, N^{-1}_{d\beta}(\theta_*) F^{-1}_{ac} F^{-1}_{bd} \left.\frac{\partial^2 V_1(L(\theta)\phi_*)}{\partial\theta_\alpha\partial\theta_\beta}\right|_{\theta=\theta_*} \tag{19.3.15}$$

が得られる. θ_* は関数 $V_1(L(\theta)\phi_*)$ の最小点なので, 右辺の行列は正だ.

この式は, 対称性の生成子と対称性を破る摂動との 2 重交換子の真空期待値を用いて, もう少し見慣れた形に書くことができる. 対称性

を破るハミルトニアンの摂動項 H_1 は (必ずしも基本スカラー場とは限らない) 演算子 Φ_n の線形結合,

$$H_1 = \sum_n u_n \Phi_n \tag{19.3.16}$$

だとする. ただし Φ_n は以下の意味で生成子 t_α を持つ対称性の群の表現になっているとする.

$$[T_\alpha, \Phi_n] = -(t_\alpha)_{nm}\Phi_m \ . \tag{19.3.17}$$

ここで T_α は対称性の群の量子力学的生成子だ. 16.3 節の結果に従うと, ポテンシャルの対称性を破る部分は,

$$V_1(\phi) = \langle H_1 \rangle_{\langle\Phi\rangle=\phi} = \sum_n u_n \phi_n \tag{19.3.18}$$

となる. 中間の表現の添字は, Φ_n が期待値 ϕ_n を持つ最低エネルギー状態で期待値をとることを示している. すると真空の整列条件 (19.3.6) は,

$$0 = \sum_n u_n (t_\alpha \phi_0)_n$$

あるいは (19.3.17) を使って,

$$0 = \langle [T_\alpha, H_1] \rangle_0 \tag{19.3.19}$$

と書ける. ここで添字 0 は Φ_n が期待値 ϕ_{0n} を持つ真空状態で期待値をとることを示す. また, (19.3.14) より質量行列は今の場合,

$$M^2_{cd} = -\sum_{ab} F^{-1}_{ca} F^{-1}_{db} \sum_n u_n (t_a t_b \phi_0)_n$$

で与えられ, (19.3.17) を使うとこれは,

$$M^2_{cd} = -\sum_{ab} F^{-1}_{ca} F^{-1}_{db} \langle [T_a, [T_b, H_1]] \rangle_0 \tag{19.3.20}$$

となる. これは c と d について対称だ. これを見るには, ヤコビ恒等式と群の交換関係を使うと (19.3.20) と, 同式の c と d を交換したものとの差が項 $\langle[T_\alpha, H_1]\rangle_0$ の線形結合で書くことができ, それは真空整列条件 (19.3.19) によりゼロとなることに気づけばよい. また, 回転した真空状態 $\exp(i\theta_a T_a)|0\rangle$ についての真空エネルギー $\langle\exp(-i\theta_a T_a)H_1\exp(i\theta_a T_a)\rangle_0$ は $\theta = 0$ で最小値をとるので, 質量行列 (19.3.20) は正だ.

19.4 ゴールドストン・ボゾンとしてのパイ中間子

素粒子物理における破れた対称性の典型例はカイラル $SU(2)\times SU(2)$ として知られる強い相互作用の近似的対称性だ. 我々の現在の理解によれば, この対称性は二つのクォーク場 u と d が存在しそれらがたまたま比較的小さな質量を持つために生じている. (質量の評価は 19.7 節で与える.) u と d が質量ゼロだという近似をすると, 量子色力学のラグランジアン (18.7.5) は,

$$\mathcal{L} = -\bar{u}\gamma^\mu D_\mu u - \bar{d}\gamma^\mu D_\mu d - \cdots \qquad (19.4.1)$$

となる. ここで D_μ はカラー・ゲージ共変微分 ((15.1.10) を見よ) で, 「$\cdots$」はグルーオン場や他のクォーク・フレーバーのみを含み u と d は含まない項だ. このラグランジアンは変換,

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \to \exp\left(i\vec{\theta}^V\cdot\vec{t} + i\gamma_5\vec{\theta}^A\cdot\vec{t}\right)\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \qquad (19.4.2)$$

のもとで不変だ. ここで $\vec{t}$ はアイソスピン行列の 3 元ベクトルで,*

$$t_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad t_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

また $\vec{\theta}^V$ と $\vec{\theta}^A$ は独立な実 3 元ベクトルだ.** このリー代数は, クォーク場のそれぞれ左手部分と右手部分のみに作用する二つの交換する $SU(2)$ 部分代数を用いて書くことができる. それらの生成子は,

$$\vec{t}_L = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\vec{t}, \qquad \vec{t}_R = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\vec{t} \tag{19.4.3}$$

で以下の交換関係を満たす.

$$[t_{Li}\,,\, t_{Lj}] = i\,\epsilon_{ijk}\, t_{Lk}\,, \tag{19.4.4}$$

$$[t_{Ri}\,,\, t_{Rj}] = i\,\epsilon_{ijk}\, t_{Rk}\,, \tag{19.4.5}$$

$$[t_{Li}\,,\, t_{Rj}] = 0\,. \tag{19.4.6}$$

したがって基礎にある対称性の群は $SU(2)\times SU(2)$ だ. ラグランジアンは別の明らかな $SU(2)$ 部分群を持つ. それは $\vec{\theta}^A = 0$ のときの通常のアイソスピン変換から成り, 生成子は次のとおりだ.

$$\vec{t} = \vec{t}_L + \vec{t}_R\,. \tag{19.4.7}$$

$SU(2)\times SU(2)$ の代数は $\vec{t}$ と生成子の別の三つ組,

$$\vec{x} = \vec{t}_L - \vec{t}_R = \gamma_5\vec{t} \tag{19.4.8}$$

*アイソスピン空間での 3 元ベクトルには矢印を使って通常の 3 元ベクトルと区別する. 後者は従来どおり太字体で表す.

**$\overline{\gamma_5\psi}\gamma^\mu = -\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu = +\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5$ なのでラグランジアン (19.4.1) はこの対称性を持つ. このラグランジアンはまた別の二つの連続な内部対称性を持つ. 一つはバリオン数の保存, つまり u と d のクォーク場に共通の位相変換のもとでの不変性だ. これは破れておらず他の対称性と可換なので, この節での議論には影響しない. もう一つの対称性はクォーク 2 重項に $\exp(i\alpha\gamma_5)$ をかける変換のもとでの不変性だ. 23.5 節で議論するように, この $U(1)$ 対称性はインスタントンにともなう非摂動論的効果で元々強く破れている.

に関して以下の交換関係で書くことができる.

$$[t_i,\, t_j] = i\epsilon_{ijk}\, t_k \ , \tag{19.4.9}$$

$$[t_i,\, x_j] = i\epsilon_{ijk}\, x_k \ , \tag{19.4.10}$$

$$[x_i,\, x_j] = i\epsilon_{ijk}\, t_k \ . \tag{19.4.11}$$

$SU(2) \times SU(2)$ 対称性は自発的に破れており, 一方 $\vec{t}$ で生成されるそのアイソスピン部分群は通常の (近似的だが) 破れていない対称性だということが以下で分かる.

ネーターの方法 (例えば 7.3 節を見よ) を使ってラグランジアン (19.4.1) から保存するベクトル・カレントと軸性ベクトル・カレント,

$$\vec{V}^\mu = i\,\bar{q}\gamma^\mu \vec{t} q \ , \qquad \vec{A}^\mu = i\,\bar{q}\gamma^\mu\gamma_5 \vec{t} q \tag{19.4.12}$$

$$\partial_\mu \vec{V}^\mu = \partial_\mu \vec{A}^\mu = 0 \tag{19.4.13}$$

を導くことができる. ここで q はクォークの 2 重項だ.

$$q \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \tag{19.4.14}$$

それらにともなう荷電はそれぞれアイソスピン対称性と残りの対称性の生成子だ.

$$\vec{T} = \int d^3x\, \vec{V}^0 \ , \tag{19.4.15}$$

$$\vec{X} = \int d^3x\, \vec{A}^0 \ . \tag{19.4.16}$$

カレント (19.4.12) は量子演算子 $\vec{T}$ および $\vec{X}$ が行列 $\vec{t}$ および $\vec{x}$ と同じ以下の交換関係を満たすように規格化されている.

$$[T_i,\, T_j] = i\,\epsilon_{ijk}\, T_k \ , \tag{19.4.17}$$

$$[T_i,\, X_j] = i\,\epsilon_{ijk}\, X_k \ , \tag{19.4.18}$$

$$[X_i,\, X_j] = i\,\epsilon_{ijk}\, T_k \ . \tag{19.4.19}$$

クォーク場に作用すると, これらの演算子は以下の意味で変換 (19.4.2) を引き起こす.

$$\left[\vec{T},\, q\right] = -\vec{t}q\,, \tag{19.4.20}$$

$$\left[\vec{X},\, q\right] = -\vec{x}q\,. \tag{19.4.21}$$

この対称性がもし厳密であり破れていなければ, 任意の 1 ハドロン状態 $|h\rangle$ は逆のパリティおよび同じスピン, バリオン数, ストレンジネスを持つ別の状態 $\vec{X}|h\rangle$ と縮退する.† ハドロンのスペクトルにはそのようなパリティの 2 重項は見られないので, もしカイラル対称性 $SU(2)\times SU(2)$ がよい近似であるとしても, それは自発的に破れてアイソスピン $SU(2)$ 部分群になっているはずだとと結論せざるを得ない. この場合には演算子 $\vec{X}$ は 1 ハドロン状態 $|h\rangle$ をハドロン h と擬スカラーのゴールドストン・ボゾンとの和に変換し, よってハドロン・スペクトルのパリティ 2 重項は必要ない.

量子色力学が実際にそのような型の対称性の破れを示すか否かという問題には強い相互作用の力学の全ての複雑な問題が関与している. 19.9 節で見るように, 量子色力学ではアイソスピン $SU(2)$ は自発的には破れていないと信じる一般的根拠があるが, $SU(2)\times SU(2)$ のカイラル部分が確かに自発的に破れていることを示すのははるかに難しい. (しかし 22.5 節で与える議論に従えば, 3 個の質量ゼロのクォーク・フレーバーを含む量子色力学の $SU(3)\times SU(3)$ 対称性は自発的に破れていなくてはならない.) しかし, 1960 年代になってカイラル対称性の破れの機構を詳細に理解する必要はないということが判明し

---

†この条件を満たす一つの方法はハドロンの質量がゼロで, ヘリシティ $\pm\frac{1}{2}$ および等しいスピン, バリオン数, ストレンジネスを持つ二つの状態 $|\pm\rangle$ が存在することだ. すると状態 $|+\rangle+|-\rangle$ と $|+\rangle-|-\rangle$ は逆のパリティを持つ. 破れていないカイラル対称性は, 軸性ベクトル・カレントの行列要素についてさらに仮定をしなければ, 核子の質量が必ずゼロになることを意味するというのは正しくない. しかし 22.5 節で見るように, 厳密な破れていないカイラル対称性は実際にいくつかのバリオンが質量ゼロになることを要求する.

た. 単に $SU(2)\times SU(2)$ は $SU(2)$ に自発的に破れていると仮定するだけで, この対称性の破れの最も興味深い結果を導くことができる.

u クォークと d クォークは小さいがゼロでない質量を持つので, $SU(2)\times SU(2)$ 対称性は厳密ではない. 近似的なカイラル対称性が破れると, 破れた対称性の生成子 $\vec{X}$ と同じ量子数を持ち, 質量が近似的にゼロのゴールゴストン・ボゾンが生じる. そのボゾンは負パリティ, スピン・ゼロ, アイソスピン 1, バリオン数とストレンジネス・ゼロの状態でなければならない. 実際全てのハドロンの中で最も軽いのはパイ中間子で, それはまさにこれらの量子数を持っているので, パイ中間子を近似的なカイラル対称性の自発的破れにともなうゴールドストン・ボゾンと同定することになる. 以下で見るように, m_u と m_d の線形結合に比例するのは m_π ではなくて m_π^2 であり, また $m_\pi^2/m_N^2 \simeq 0.022$ は非常に小さいので, 自発的に破れた $SU(2)\times SU(2)$ から導かれる結果は相当に精確なはずだ.

カイラル対称性のパイ中間子相互作用に関する帰結を調べる際に, 強い相互作用のカイラル対称性は弱い相互作用の存在にはまったく依らないが対称性カレント $\vec{V}^\mu$ および $\vec{A}^\mu$ がたまたま原子核のベータ崩壊のようなストレンジネスを保存する準レプトン的な弱い相互作用に顔を出すカレントだということに留意するのは非常に有用だ. 21.3 節で見るように, 電弱相互作用の標準模型ではこれらの相互作用の低エネルギーでの有効ラグランジアンは以下の形をとることが要求される.

$$\mathcal{L}_{\rm wk} = -\frac{iG_{\rm wk}}{\sqrt{2}}\left(V_+^\lambda + A_+^\lambda\right)\sum_\ell \bar{\ell}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\nu_\ell + \text{H.c.} \tag{19.4.22}$$

ここで ℓ についての和は三つの荷電レプトン e, μ, τ のくりこまれた場についてとり, ν_ℓ はそれらにともなうニュートリノのくりこまれた

場だ. また $V_\pm^\lambda$ と $A_\pm^\lambda$ は電荷を変える以下のカレントだ.

$$V_\pm^\lambda = V_1^\lambda \pm i\,V_2^\lambda\,, \qquad A_\pm^\lambda = A_1^\lambda \pm i\,A_2^\lambda\,. \tag{19.4.23}$$

定数[††] $G_{\rm wk}$ は崩壊 $\pi^+ \to \pi^0 + e^+ + \nu_e$ や $^{14}O \to {}^{14}N^* + e^+ + \nu_e$ のような同じアイソスピン多重項内のスピン・ゼロ状態間のベータ遷移率から測定できる. これらの遷移での運動量移行は非常に小さいので, (強い相互作用での) パリティ保存と回転不変性から, これらの崩壊の S 行列要素には $\int d^3x\,V_-^0 = T_1 - iT_2$ の行列要素だけが入ってくることが分かる. この演算子はアイソスピン多重項の状態間で既知のクレブシュ・ゴルダン係数の行列要素を持つので, これらの「$0 \to 0$」過程の反応率から (19.4.22) の結合定数の値[9]が $G_{\rm wk} \simeq 1.14959(38) \times 10^{-5}$ GeV^{-2} と計算できる. 他方, パイ中間子の崩壊 $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$ の過程では, カレントの行列要素で必要なのは 1 パイ中間子状態と真空の間の A_-^λ の以下の行列要素だけだ.

$$\langle {\rm VAC}|A_i{}^\mu(x)|\pi_j\rangle = \frac{iF_\pi\,\delta_{ij}\,p_\pi^\mu\,e^{ip_\pi\cdot x}}{2(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p_\pi^0}}\,. \tag{19.4.24}$$

これは因子 F_π を除いて完全に分かっている. パイ中間子の崩壊率は,

$$\Gamma(\pi \to \mu + \nu) = \frac{G_{\rm wk}^2 F_\pi^2 m_\mu^2 (m_\pi^2 - m_\mu^2)^2}{16\pi m_\pi^3} \tag{19.4.25}$$

となる. $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$ の既知の崩壊率 $\Gamma = (2.6033(24) \times 10^{-8}\ {\rm s})^{-1}$ と $G_{\rm wk}$ の上記の値とから, 以下が得られる.[‡]

$$F_\pi \simeq 184\ {\rm MeV}\,. \tag{19.4.26}$$

次に $\vec{A}^\mu$ の 1 核子状態間の行列要素を考察しよう. これはそれ自体興味深いが, 19.2 節で議論したように核子衝突における低エネル

[††] $G_{\rm wk}$ は通常のフェルミ結合定数 G_F およびキャビボ (Cabibbo) 角 θ_C と $G_{\rm wk} = G_F \cos\theta_C$ の関係にある. 21.3 節を見よ.

[‡] 一般にはパイ中間子の崩壊定数 f_π がしばしば登場するが, これはここで使った F_π を用いて F_π, $F_\pi/\sqrt{2}$, $F_\pi/2$ 等のように様々に定義される.

ギー・パイ中間子の放出を計算するために必要な情報を与える. 10.6 節で電磁カレントに関して使ったのと同じ理由付けに従って, ローレンツ不変性とパリティ保存則よりこの行列要素は以下の形をとることが要求される.‡‡

$$\langle p|A_+^\mu(x)|n\rangle = (2\pi)^{-3}\, e^{iq\cdot x} \times \bar{u}_p\Big[-i\gamma^\mu\gamma_5 f(q^2) + q^\mu\gamma_5 g(q^2) + iq_\nu[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\gamma_5 h(q^2)\Big]u_n \ . \tag{19.4.27}$$

ここで $q \equiv p_n - p_p$ だ. $SU(2)\times SU(2)$ 対称性が厳密だとする近似のもとではカレントの保存から,

$$q_\mu\langle p|A_+^\mu(x)|n\rangle = 0 \tag{19.4.28}$$

が成り立たねばならない. ディラック・スピノル u_p と u_n の定義式,

$$\bar{u}_p(i\not{p}_p + m_N) = (i\not{p}_n + m_N)u_n = 0\ ,$$

を使うと,

$$q_\mu\bar{u}_p[-i\gamma^\mu\gamma_5]u_n = -2m_N\bar{u}_p\gamma_5 u_n$$

となり, よって (19.4.28) から,

$$2m_N f(q^2) = q^2 g(q^2) \tag{19.4.29}$$

が得られる. もし $g(q^2)$ が $q^2=0$ で特異性を持たなければ, (19.4.29) は $m_N=0$ か $f(0)=0$ を要求する. 前者は明らかに事実ではないし, 後者も正しくない. 実際, $f(0)$ は中性子崩壊のような低エネルギーの原子核ベータ崩壊で測定され, 通常 g_A と呼ばれている. その値は,

$$f(0) \equiv g_A = 1.2573(28) \tag{19.4.30}$$

‡‡標準模型のカレント $A_\pm^\mu$ は荷電共役の性質から係数 $h(q^2)$ がゼロになる. 弱い相互作用のカレントには, ゼロでない $h(q^2)$ を与える逆の荷電共役性を持つ「第 2 類」の項[10]が存在し得るが, そのような項が存在する証拠はない. 以下で見るように, $h(q^2)$ 項を残してもカイラル対称性から導かれる結論には影響がない.

だ. m_N も $f(0) = g_A$ もどちらも小さくないという事実から厳密な $SU(2)\times SU(2)$ 対称性の極限で $g(q^2)$ は $q^2 \to 0$ で極を持たなければならないことが分かる.

$$g(q^2) \to \frac{2m_N g_A}{q^2} . \tag{19.4.31}$$

そのような極は厳密な $SU(2)\times SU(2)$ 対称性の自発的破れから要求される質量ゼロのパイ中間子によって自然に供給される. パイ中間子は 1 核子状態に相互作用ラグランジアンがあたかも $-2iG_{\pi N}\vec{\pi}\bar{N}\gamma_5\vec{t}N$ であるかのように結合するとしよう.[♮] (19.4.24) より, 1 パイ中間子と真空との間のカレントの行列要素はあたかも $\vec{A}^\mu(x)$ に $F_\pi\partial^\mu\vec{\pi}/2$ の形の項が存在するときと同じである. したがって $q^2 \to 0$ の極限で行列要素 (19.4.27) は以下のように極を持つ.

$$\langle p|A_+^\mu(x)|n\rangle \to \left[\frac{e^{iq\cdot x}}{(2\pi)^3}\right]\left[i(2\pi)^4\, 2G_{\pi N}\,\bar{u}_p(i\gamma_5)u_n\right] \times\left[\frac{-i}{(2\pi)^4 q^2}\right]\left[iq^\mu F_\pi/2\right] .$$

(19.4.27) と比較すると, 1 個のパイ中間子の交換は $q^2 \to 0$ で関数 $g(q^2)$ に極,

$$g(q^2) \to \frac{G_{\pi N}F_\pi}{q^2} \tag{19.4.32}$$

を与えることが分かる. (19.4.31) と (19.4.32) を合わせると,

$$G_{\pi N} = \frac{2m_N g_A}{F_\pi} \tag{19.4.33}$$

が得られる. これは有名なゴールドバーガー・トライマン (Goldberger–Treiman) の関係式だ.[11] これはかなりよく成り立っている. $m_N = (m_p + m_n)/2 = 938.9$ MeV として, $g_A = 1.257$ と $F_\pi = 184$ MeV から $G_{\pi N} \simeq 12.7$ が得られるが, これは様々な方法 (核子・原子核散乱に

[♮] これは擬スカラー・核子結合 $G_{\pi N}$ の通常の定義だ. ここで因子 2 を導入したのはアイソスピン行列の 1/2 を相殺するためだ.

おける 1 パイ中間子の極やパイ中間子・核子散乱での 1 核子の極の効果を含む) で測定された値[ㅂㅂ] $G_{\pi N} = 13.5$ にかなり一致している.

現実にはパイ中間子は質量ゼロではなく $SU(2) \times SU(2)$ 対称性は (対称性が自発的に破れる以前においても) 厳密ではない. この状況は前節で与えた一般的な形式を使って解析することができる. ラグランジアン (18.7.5) はハミルトニアンに対称性を破る項,

$$H_1 = m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d = (m_u + m_d)\Phi_4^+ + (m_u - m_d)\Phi_3^- \qquad (19.4.34)$$

を生じる. ここで,

$$\Phi_4^+ \equiv \tfrac{1}{2}\left(\bar{u}u + \bar{d}d\right), \qquad \Phi_3^- = \tfrac{1}{2}\left(\bar{u}u - \bar{d}d\right) \qquad (19.4.35)$$

とした. 演算子 Φ_4^+ と Φ_3^- は空間的スカラーで, この記法が意図しているように, $SU(2) \times SU(2)$ のもとで以下の独立なカイラル 4 元ベクトル $\Phi_\alpha^\pm$ として変換する.

$$\vec{\Phi}^+ = i\bar{q}\gamma_5\vec{t}q\,, \qquad \Phi_4^+ = \tfrac{1}{2}\,\bar{q}q\,, \qquad (19.4.36)$$

$$\vec{\Phi}^- = \bar{q}\vec{t}q\,, \qquad \Phi_4^- = -\tfrac{1}{2}\,i\bar{q}\gamma_5 q\,. \qquad (19.4.37)$$

これらは以下の意味でカイラル 4 元ベクトルだ.

$$\left[\vec{T},\, \Phi_n^\pm\right] = -\sum_m (\vec{\mathcal{T}})_{nm}\Phi_m^\pm\,, \qquad (19.4.38)$$

$$\left[\vec{X},\, \Phi_n^\pm\right] = -\sum_m (\vec{\mathcal{X}})_{nm}\Phi_m^\pm\,. \qquad (19.4.39)$$

ここで $\vec{\mathcal{T}}$ と $\vec{\mathcal{X}}$ は, $SU(2) \times SU(2) \equiv SO(4)$ 代数の 4 元ベクトル表現を成すエルミートな 4×4 行列だ.

$$(\mathcal{T}_a)_{bc} = -\,i\,\epsilon_{abc}\,, \qquad (\mathcal{T}_a)_{b4} = (\mathcal{T}_a)_{4b} = (\mathcal{T}_a)_{44} = 0\,, \qquad (19.4.40)$$

$$(\mathcal{X}_a)_{b4} = -\,(\mathcal{X}_a)_{4b} = -i\delta_{ab}\,, \qquad (\mathcal{X}_c)_{ab} = (\mathcal{X}_c)_{44} = 0\,. \qquad (19.4.41)$$

[ㅂㅂ] 教科書[12]の値は $G_{\pi N}^2/4\pi = 14.3$, すなわち $G_{\pi N} = 13.4$ だ. より最近の 162 MeV での中性子・陽子荷電交換散乱の高精度の研究から $G_{\pi N}^2/4\pi = 14.6 \pm 0.3$, つまり $G_{\pi N} = 13.5$ の値が得られている.

この記法では真空整列条件が生成子 T_1, T_2, X_1, X_2, X_3 についてそれぞれ,

$$0 = \langle \Phi_2^- \rangle_0 = \langle \Phi_1^- \rangle_0 = \langle \Phi_1^+ \rangle_0 = \langle \Phi_2^+ \rangle_0$$
$$= (m_u + m_d)\langle \Phi_3^+ \rangle_0 + (m_d - m_u)\langle \Phi_4^- \rangle_0 \qquad (19.4.42)$$

の形をとることが容易に分かる. これまで u クォークと d クォークの質量がなければ $SU(2) \times SU(2)$ 対称性は自発的に破れて, $\vec{T}$ で生成される $SU(2)$ 対称性はパリティとともに破れずに保存され, その場合 $\langle \Phi_n^+ \rangle_0$ は 4 方向を向き $\langle \Phi_n^- \rangle_0$ はゼロになって, 条件 (19.4.42) が満たされると仮定してきた. しかし $m_u = m_d = 0$ のときには, この解に任意の $SU(2) \times SU(2)$ 変換を施して, 別の定義のパリティを持った対称性の破れの他の解が得られる. したがって u クォークと d クォークの質量がゼロならば, 必ず $\langle \Phi_n^- \rangle_0 = 0$ ではあるが, $\langle \Phi_n^+ \rangle_0$ がどの方向を向くのか, あるいは $SU(2) \times SU(2)$ のどの $SU(2)$ 部分群が破れずに残るのかを知る方法はない. 真空の整列条件 (19.4.42) より, 対称性が摂動 (19.4.34) により元々破れていて, さらに $\langle \Phi_n^- \rangle_0 = 0$ というように自発的に破れていれば, 真空は $\langle \Phi_n^+ \rangle_0$ が 4 方向を向くように「整列」しなければならず, よって破れていない $SU(2)$ 対称性は通常のアイソスピンだということになる.

この形式を使って, パイ中間子の質量の計算ができる. (19.4.39)–(19.4.41) から,

$$[X_a, [X_b, \Phi_4^+]] = \delta_{ab}\Phi_4^+ , \qquad [X_a, [X_b, \Phi_3^-]] = \Phi_a^- \delta_{b3} \qquad (19.4.43)$$

が分かる. また, アイソスピン不変性から, 19.2 節で導入した対称性の破れのパラメータ F_{ab} は δ_{ab} に比例し, 比例因子は (19.4.24) に従ってちょうど $F_\pi/2$ なので,

$$F_{ab} = \delta_{ab} F_\pi / 2 \qquad (19.4.44)$$

が得られる. したがって (19.3.20) からパイ中間子の質量行列が,

$$m^2_{ab} = \delta_{ab} m^2_\pi \tag{19.4.45}$$

と与えられる. ここで,

$$m^2_\pi = -4(m_u + m_d)\langle \Phi^+_4 \rangle_0 / F^2_\pi \tag{19.4.46}$$

とした. m_u と m_d の比について何の仮定もしていないにも関わらず, 荷電パイ中間子と中性パイ中間子の質量が等しくなることは驚きだ. 以下で見るように m_u と m_d の比は 1 に近くはない. アイソスピンがよい量子数であるのは u クォークと d クォークの質量がほとんど等しいからではなく, それらが小さいからだ. また, 前に述べたとおり, クォークの質量に比例するのはパイ中間子の質量の 2 乗なのでクォークの質量は非常に小さいはずだ. (クォークの質量の評価は 19.7 節を見よ.) パイ中間子の観測される質量差は u クォークと d クォークの質量差から生じるのではなく, 電磁相互作用から生じる. 実際, パイ中間子のアイソスピン多重項は, 質量差が 1 光子交換のみに基づいてうまく計算できた唯一のものだ.[14]

もちろん, クォークの質量を考慮しても, 依然 (19.4.24) は F_π を定義するのに使うことができて, その発散は,

$$\langle \mathrm{VAC} | \partial_\mu A^\mu_i(x) | \pi_j \rangle = \frac{F_\pi \delta_{ij} m^2_\pi e^{ip_\pi \cdot x}}{2(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p^0_\pi}} \tag{19.4.47}$$

を与える. $\partial_\mu \vec{A}^\mu$ がゼロになると仮定する代わりに, 今度はそれが, パイ中間子の極が m^2_π の小ささを相殺する場合を除いて, m^2_π の程度に小さいと仮定する. (19.4.47) によれば, $\partial_\mu \vec{A}^\mu$ の行列要素の 1 パイ中間子の極の近傍での振舞いは, $\partial_\mu \vec{A}^\mu$ が $F_\pi m^2_\pi$ と適切にくりこまれたパイ中間子場との積だとしたときと同じだ. 例えば, $\partial_\mu A^\mu_+$ の 1 核子

行列要素は,

$$\langle p|\partial_\mu A^\mu_+(0)|n\rangle \simeq \frac{F_\pi m_\pi^2}{2}\left[\frac{-i}{(2\pi)^4(q^2+m_\pi^2)}\right]\left[i(2\pi)^4 2G_{\pi N}\bar{u}_p(-i\gamma_5)u_n\right] \tag{19.4.48}$$

となるはずで, (19.4.27) の形状因子については,

$$q^2 g(q^2) - 2m_N f(q^2) \simeq -\frac{G_{\pi N}F_\pi m_\pi^2}{q^2+m_\pi^2} \tag{19.4.49}$$

となるはずだ. これは $q^2 \to -m_\pi^2$ の極限だけでなく q^2 が m_π^2 の程度のときには正しいと期待される. なぜなら, そのように小さな全ての q^2 の場合にパイ中間子の極が $\partial_\mu A^\mu$ の行列要素に主要な寄与をするからだ. また, そのような q^2 の場合, (19.4.32) の代わりに,

$$g(q^2) \simeq \frac{G_{\pi N}F_\pi}{q^2+m_\pi^2} \tag{19.4.50}$$

となる. (19.4.49) と (19.4.50) とから, q^2 が m_π^2 の程度の場合には,

$$f(q^2) \simeq G_{\pi N}F_\pi \Big/ 2m_N \tag{19.4.51}$$

が得られる. この関数がゼロから m_π^2 の程度の値までの q^2 の範囲にわたってほとんど定数であることは驚くには当たらない. なぜなら, それはパイ中間子の極を持たず, そのように小さな範囲の q^2 で大きな変化を生じさせることのできるものは他にないからだ. この定数値はほぼ $f(0) \equiv g_A$ なので, (19.4.51) から再びゴールドバーガー・トライマンの関係式が得られる.

19.2 節の結果を使って任意の過程 $\alpha \to \beta$ で 1 個の低エネルギー・パイ中間子が放出される振幅を計算できる. 振幅はパイ中間子が外線のみから放出されるファインマン・ダイアグラムから計算すべきこと, また (19.2.49) よりこれらの寄与はパイ中間子場の相互作用があたかも $\partial_\mu \vec{\pi} \cdot \vec{A}_N / F_\pi$ だとして計算すべきことが分かった. ここで添字 N は軸性ベクトル・カレントの行列要素で 1 パイ中間子の極の項は落と

すべきことを表す. (19.4.27) (およびアイソスピン不変性) を使うと, 核子の線から放出される低エネルギー・パイ中間子についてはこの相互作用は実際上,

$$-\frac{ig_A}{F_\pi}\,\partial_\mu\vec{\pi}\,\bar{N}\gamma^\mu\gamma_5\vec{t}N$$

となる. 自由粒子のディラック方程式を使うと, 質量殻上の (つまり図 19.2 の 1 核子の極での) 核子についてこれは擬スカラー相互作用 $-2im_N\,g_A\,\vec{\pi}\cdot\bar{N}\gamma_5\vec{t}N/F_\pi$ と同等だと分かる. これはゴールドバーガー・トライマンの関係式 (19.4.33) のさらに別の例示になっている.

* * *

ここでの議論はこれらの考え方の歴史的な発展に沿ったものにはなっていない. 実際, 歴史的発展の順序は, 時間的に言えばここでの議論の筋とほぼ正確に逆だ. 素粒子物理学における対称性の破れはゴールドバーガー・トライマンの関係 (19.4.33) から始まった. それは 1957 年にパイ中間子崩壊の力学的計算に基づいて導かれた.[11] この極めて大まかな計算の驚くべき成功を説明するために, 何人かの理論家[15]が「軸性ベクトル・カレントの部分的保存」(PCAC) という考え方を導入した. この考え方は, 軸性ベクトル・カレントは (パイ中間子が実際に崩壊するという事実に示されているとおり) 保存しないが, その発散 $\partial_\mu A^\mu_\pm$ はパイ中間子場に比例するというものだ. この仮定そのものは無意味だ. なぜなら, 10 章で見たように, 真空と 1 パイ中間子状態との間でゼロでない行列要素を持つどのような場もパイ中間子場と見なすことができるからだ. 当時は明確ではなかったが, 本当に仮定されていたことは, 軸性ベクトル・カレントの発散は, パイ中間子の極が大きな行列要素を与える場合を除いて, m_π^2 の程度に小さいということだ. この問題は南部の 1960 年の論文[16]で非常に明確になった. 彼は, パイ中間子の質量がゼロの極限で軸性ベクトル・カレントは厳密に保存すると見なせ, その場合ゴールドバーガー・トライマンの関係

式はここで示したとおりに導けることを指摘した. 南部はこの論文およびその後のヨナラシニオとの共著論文[17]で, この質量がゼロまたはほとんどゼロのパイ中間子の出現は, 厳密あるいは近似的な対称性の破れのしるしだということを示した. 南部はまた他の共同研究者[18]とともに, 様々な過程での 1 個の低エネルギー・パイ中間子の放出率の計算法を示した. その後ゴールドストン[3]は対称性の破れには常に質量ゼロのボゾンが伴っていることを指摘し, これは 1962 年にゴールドストン, サラム, 私[5] によってこの本の 19.2 節で与えた議論を使って証明された.

パイ中間子をゴールドストン・ボゾンとするこの初期の仕事は破れた対称性の群の性質についてはなんら特別な仮定はしていない. 例えばそれは, 三つの可換な $U(1)$ 群の直積でその生成子がアイソスピン・ベクトルを構成するということでもよかったし, 負符号が交換関係 (19.4.19) の右辺に現れる非コンパクト群 $SO(3,1)$ でもよかった. 1965 年のアドラー・ワイスバーガー (Weisberger) の和則[19]に始まる 2 個以上のパイ中間子を含む過程の考察において初めて, 破れた対称性の群の性質が重要になった. その成功により破れた対称性は実際 $SU(2) \times SU(2)$ であることが示された. (その過程は次の節で議論する.) 対称性の群が $SU(2) \times SU(2)$ と同定されたことで, 重点は強い相互作用の物理の中でのこの対称性の意味に移り,[20] それ以前のカレント自体への関心[21]は薄らいだ.

この仕事は全て強い相互作用の特別な理論無しで行われた. 量子色力学が 1973 年に強い相互作用の正しい理論として急速に登場した理由の一つは, それにより $SU(2) \times SU(2)$ 対称性が u クォークと d クォークの質量の小ささの単純な結果として説明できたことだ.

19.5 有効場の理論：パイ中間子と核子

19.2 節で低エネルギーのゴールドストン・ボゾン B 1 個が遷移 $\alpha \to \beta + B$ によって放出される振幅の計算方法を学んだ. それは, 状態 α と β との間の対称性のカレントの行列要素にカレント保存の条件を課して得られた. この計算では破れた対称性の群の詳細についてどのような情報も使う必要がなく, 必要なのはカレントの保存だけだった. 2 個のゴールドストン・ボゾンの放出・吸収の行列要素を計算したいときには新しい要素が入ってくる. ゴールドストン・ボゾンの散乱過程がその例だ. この場合, 以下のような行列要素にカレント保存の条件を適用しなければならない.

$$\langle\beta|T\{J_1^{\lambda_1}(x_1), J_2^{\lambda_2}(x_2)\}|\alpha\rangle \ .$$

ここで状態 α と β は反応に参加する粒子のうち 2 個のゴールドストン・ボゾンを除く他の粒子を含む. しかし発散演算子 $\partial/\partial x_1^{\lambda_1}$ をこの行列要素に作用させるとき, 時間順序積 $T\{\cdots\}$ の定義に現れる関数 $\theta(x_1^0 - x_2^0)$ および $\theta(x_2^0 - x_1^0)$ の微分からゼロでない寄与がある. この寄与は同時刻交換子 $\delta(x_1^0 - x_2^0)[J_1^0(x_1), J_2^{\lambda_2}(x_2)]$ の行列要素に等しく, その値は群の代数の交換関係に依る. このことはそのような多くのゴールドストン・ボゾンを含む過程を特別に興味深いものにしている. なぜなら, それらを使って破れた対称性の群の性質を実験的に決めることができるからだ. これは 1 個だけのゴールドストン・ボゾンを含む過程では不可能だ. このようにカレントの交換子が現れるので, この方法は**カレント代数** (current algebra) の方法と呼ばれている.[21]

カレント代数の方法は多ゴールドストン・ボゾン振幅の初期の計算[22]で使われた. 残念ながら, そのような計算は, 特に 3 個以上のゴールドストン・ボゾンを含むときには, 冗長となる. また量子色力学の厳密でないカイラル対称性のような対称性の取り扱い方を知ること

も難しかった. このため, より物理的な, 有効ラグランジアンを使う別の計算技法が導入された.[23] この方法では単に, ゴールドストン・ボゾンおよび状態 α と β に含まれる他の粒子の, 破れた対称性を満たすあるラグランジアンを使って, 摂動論の方法でゴールドストン・ボゾン振幅を計算すればよい.

元来, 有効ラグランジアンの方法の正当性はカレント代数に基づいていた. カレント代数を使うと, 過程 $\alpha \to \beta + B_1 + B_2 + \cdots$ での 1 組の低エネルギー・ゴールドストン・ボゾンの放出振幅は, 破れた対称性にともなうカレントの同時刻交換関係と過程 $\alpha \to \beta$ の行列要素, および様々な 1 粒子状態間のカレントの行列要素が一旦分かれば, 決まる. 破れた対称性を満たすラグランジアンからネーターの方法で適切な同時刻交換子を持つ保存カレントを作ることができることは分かっている. したがってそのようなラグランジアンを使って低エネルギー・ゴールドストン・ボゾン振幅を単純に計算して $M_{\beta\alpha}$ とカレントの 1 粒子行列要素の正しい値を代入すれば, カレント代数で与えられるのと同じ答を得るはずだ. ゴールドストン・ボゾンのみの間の相互作用の場合には, 状態 α と β は両方とも真空にとればよく, ゴールドストン・ボゾン状態と真空の間の行列要素 F 以外の余分な情報は不要だ.

この種の最初の例[23]では, 出発点は σ 模型のラグランジアンだった.[24] しばらくの間この模型のボゾン部分に注目することにすると, そのラグランジアンは 19.2 節の例として使った以下の $SO(4)$ 不変なラグランジアンだ.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu \phi_n \partial^\mu \phi_n - \frac{\mathcal{M}^2}{2}\phi_n\phi_n - \frac{\lambda}{4}(\phi_n\phi_n)^2 \,. \tag{19.5.1}$$

ここで n は値 1, 2, 3, 4 について和をとり, $\vec{\phi}$ はアイソベクトルの擬スカラー場で ϕ_4 はアイソスカラーのスカラー場だ.

どのような有効ラグランジアンでもすぐに直面する問題は, それを

使って散乱振幅が計算できるためには, 摂動論の全ての次数のあらゆるファインマン・ダイアグラムを含めるか, そうでなければ高次のダイアグラムを落とす何らかの根拠を見つけなければならないことだ. 破れた対称性が様々な場の線形変換により実現している (19.5.1) のようなラグランジアンではそのような根拠は見出せない. 幸い, 任意のそのようなラグランジアンは, ファインマン・ダイアグラムを使って散乱振幅をゴールドストン・ボゾンのエネルギーの冪で展開することを可能にする形に書き換えることができる. そのために, 時空の各点で対称性変換を実行して, 理論のゴールドストン・ボゾンに対応する場を取り除く. ゴールドストン・ボゾンの自由度は変換された理論ではこの対称性変換のパラメータとして現れる. しかしラグランジアンは, 時空に依らない対称性変換のもとで不変なので, 新しいゴールドストン・ボゾン場が定数のときにはこれに依存することはまったくできない. よってラグランジアンのこれらのゴールドストン・ボゾン場を含むあらゆる項は場の時空微分を少なくとも 1 個含まなければならない. これらの微分は, ゴールドストン・ボゾン反応の S 行列要素を計算するときにゴールドストン・ボゾンのエネルギーの因子を生じる. したがって以下で見るように, このラグランジアンを使って S 行列要素をこれらのエネルギーの冪級数として計算できる.

例えば, ラグランジアン (19.5.1) を有用な形に書き換えるために, 4 元ベクトル ϕ_n を, 最初の 3 成分 (ϕ_n のゴールドストン部分) がゼロの 4 元ベクトル $\{0, 0, 0, \sigma\}$ にカイラル回転 R を作用させたもので書く.

$$\phi_n(x) = R_{n4}(x)\sigma(x)\ . \tag{19.5.2}$$

ここで $R_{nm}(x)$ は以下のとおり直交行列だ.

$$R^T(x)\,R(x) = 1\ . \tag{19.5.3}$$

したがって,

$$\sigma(x) = \sqrt{\sum_n \phi_n(x)^2} \tag{19.5.4}$$

となる. するとラグランジアン (19.5.1) は,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{4}\Big(R_{n4}\partial_\mu\sigma + \sigma\partial_\mu R_{n4}\Big)^2 - \frac{1}{2}\mathcal{M}^2\sigma^2 - \frac{\lambda}{4}\sigma^4 \tag{19.5.5}$$

となる. R は直交行列なので, $\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma$ 項は R に依らず, また交差項はゼロになる.

$$\sum_n R_{n4}^2 = 1\,, \qquad \sum_n R_{n4}\partial_\mu R_{n4} = \frac{1}{2}\partial_\mu\sum_n R_{n4}^2 = 0\,.$$

よって, $\mathcal{L}$ は次のようになる.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\,\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - \frac{1}{2}\sigma^2\sum_{n=1}^{4}\partial^\mu R_{n4}\,\partial_\mu R_{n4} - \frac{1}{2}\mathcal{M}^2\sigma^2 - \frac{\lambda}{4}\sigma^4\,. \tag{19.5.6}$$

もし $\mathcal{M}^2$ が負なら σ はゼロでない真空期待値を持ち, それは最低次では最後の 2 項の和が最小値をとる点 $\sigma = |\mathcal{M}|/\sqrt{\lambda}$ だ.

場の変数 ϕ_n の代わりに, 今の変数は $\sigma - |\mathcal{M}|/\sqrt{\lambda}$ とその他に回転 R を指定するために必要な全ての変数だ. 例えば, これらのパラメータは単純に R_{a4} そのものに選ぶことが可能だ. (以後 $a, b, \cdots$ は 1,2,3 の値をとるアイソベクトルの添字だ.) ここで R_{44} は R が直交行列だという条件で決まる. 別のパラメータ化の方法はもっと簡単な最終結果を与え, 歴史的には最初に使われた. それは,

$$\zeta_a \equiv \frac{\phi_a}{\phi_4 + \sigma} \tag{19.5.7}$$

と定義し,

$$R_{a4} = \frac{2\zeta_a}{1+\vec{\zeta}^2} = -R_{4a}\,, \quad R_{44} = \frac{1-\vec{\zeta}^2}{1+\vec{\zeta}^2}\,, \quad R_{ab} = \delta_{ab} - \frac{2\zeta_a\zeta_b}{1+\vec{\zeta}^2} \tag{19.5.8}$$

ととる方法で,

$$\phi_a/\sigma = R_{a4} = \frac{2\zeta_a}{1+\vec{\zeta}^2}\,, \qquad \phi_4/\sigma = R_{44} = \frac{1-\vec{\zeta}^2}{1+\vec{\zeta}^2} \tag{19.5.9}$$

となる. するとラグランジアン (19.5.6) は,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - 2\,\sigma^2\vec{D}_\mu\cdot\vec{D}^\mu - \frac{1}{2}\,\mathcal{M}^2\sigma^2 - \frac{\lambda}{4}\,\sigma^4 \tag{19.5.10}$$

となる. ここで,

$$\vec{D}_\mu \equiv \frac{\partial_\mu\vec{\zeta}}{1+\vec{\zeta}^2} \tag{19.5.11}$$

と定義した. どのようなパラメータ化を使おうと, 場 $\vec{\zeta}$ は質量ゼロの粒子を記述し, その相互作用は全て場の微分を含むことは明らかだ. これらの場は (規格化を除いて) ここでの新しいパイ中間子場だ.

見かけにかかわらず, このラグランジアンは依然 $SO(4)$ のもとで不変だ. ここでは $SO(4)$ は非線形に実現している. 微小パラメータ $\vec{\theta}$ によるアイソスピン変換のもとで, 場 $\vec{\zeta}$ は単に通常のアイソベクトルのように回転し, σ はアイソスカラーだ.

$$\delta\vec{\zeta} = \vec{\theta}\times\vec{\zeta}\,, \qquad \delta\sigma = 0\,. \tag{19.5.12}$$

よってラグランジアン (19.5.10) は明白にアイソスピン不変だ. 他方, 微小ベクトル $\vec{\epsilon}$ をパラメータとする破れた対称性の変換のもとで, 元の場は,

$$\delta\vec{\phi} = 2\vec{\epsilon}\phi_4\,, \qquad \delta\phi_4 = -2\vec{\epsilon}\cdot\vec{\phi} \tag{19.5.13}$$

に従って変換する. (19.5.7) から,

$$\delta\vec{\zeta} = \vec{\epsilon}(1-\vec{\zeta}^2) + 2\vec{\zeta}(\vec{\epsilon}\cdot\vec{\zeta})\,, \qquad \delta\sigma = 0 \tag{19.5.14}$$

が分かる. ラグランジアン (19.5.10) は破れた対称性の変換 (19.5.14) のもとで不変だ. なぜなら $\vec{D}_\mu$ は (場に依存する) 線形のアイソスピン回転,[25]

$$\delta\vec{D}_\mu = 2(\vec{\zeta}\times\vec{\epsilon})\times\vec{D}_\mu \tag{19.5.15}$$

を受け, (19.5.10) はアイソスピン不変だからだ. 変換則 (19.5.15) より $\vec{D}_\mu$ はしばしばパイ中間子場の共変微分と呼ばれる.

変換則 (19.5.12) と (19.5.14) は群 $SU(2)\times SU(2)$ の**非線形実現** (non-linear realization)[25] と呼ばれるものになっている. リー群の非線形実現の一般論は次節で与えるが, そこで示すように, 場の再定義を除いて, 変換則 (19.5.12) と (19.5.14) は $SU(2)\times SU(2)$ の実現の中で, アイソスピン $SU(2)$ 部分群が $\vec{\zeta}$ について線形に実現している最も一般的なものだ.

これらの新しいパイ中間子場の相互作用には時空微分が伴っているので, 低エネルギーのパイ中間子については有効結合が弱いことが分かる. (この点については以下でより正確に述べる.) したがって十分に小さなパイ中間子のエネルギーについてはこのラグランジアンを樹木近似で使ってカレント代数の低エネルギー・パイ中間子定理 (soft-pion theorem) を再現することが出来る. このためには, ラグランジアンが $SO(4)$ 不変でありさえすればよい. しかし, σ 場は $SO(4)$ スカラーなので, ラグランジアンの $SO(4)$ 不変性を保つのに何の役割も果たしておらず, 単純にそれを無視してよい.* もちろんこのやり方は理論の物理的内容を変えるが, 低エネルギー・パイ中間子定理で与えられる振幅は変えない. するとラグランジアン (19.5.10) は次のように簡単になる.

$$\mathcal{L} = -\frac{F^2}{2}\vec{D}_\mu\vec{D}^\mu = -\frac{F^2}{2}\frac{\partial_\mu\vec{\zeta}\cdot\partial^\mu\vec{\zeta}}{(1+\vec{\zeta}^2)^2}\,. \tag{19.5.16}$$

ここで $F = 2\langle\sigma\rangle = 2|\mathcal{M}|/\sqrt{\lambda}$ だ. (すぐに見るように, この F は前節で議論した定数 F_π だ.) 多くの目的には通常のように規格化されたパイ中間子場,

$$\vec{\pi} \equiv F\vec{\zeta} \tag{19.5.17}$$

*あるいは, σ の期待値を定数に保ったまま $\mathcal{M}$ と λ がともに無限大になる極限に行くこともできる.

を使う方が便利だ．そうするとラグランジアン (19.5.16) は，

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\frac{\partial_\mu\vec{\pi}\cdot\partial^\mu\vec{\pi}}{(1+\vec{\pi}^2/F^2)^2} \tag{19.5.18}$$

となる．因子 $1/F$ はパイ中間子の相互作用において余分なパイ中間子毎に付く結合パラメータの役割をする．(19.5.18) はしばしば「非線形 σ 模型」と呼ばれ，$SU(2)\times SU(2)$ が $SU(2)$ に自発的に破れる特別の場合になっている．

重要な点として，(19.5.18) を導くのに必ずしも「線形 σ 模型」のラグランジアン (19.5.1) から出発する必要はなかった．実際，どのような特別な理論から出発する必要もなかったのだ．(19.5.18) は $SO(4)$ の変換 (19.5.12), (19.5.14) のもとで不変だという理由だけで使うことができ，カレント代数より，低エネルギー・パイ中間子反応の振幅の正しい結果を得るのに必要なのはこれだけだという事が分かる．

低エネルギー・パイ中間子の有効ラグランジアンが導入された数年後，有効場理論の技法を正当化する別の議論[26]が現れた．それはカレント代数に頼らず，ゴールドストン・ボゾンのエネルギーが非常に小さい極限に限らない計算を可能にする．それは，(未だ正式な定理の形にはなっていないが) 理論に含まれる自由度を持ち，理論で仮定された対称性を満たす最も一般的なラグランジアンを使ってファインマン・ダイアグラムから物理的振幅を計算すると，相対論と量子力学の一般的原理および仮定された対称性と矛盾しない最も一般的な振幅が単に得られるという理解に基づいている．これは本書の 1・2 巻 (原著 I 巻) の根底にある観点だった．今の場合，「関与する自由度」はゴールドストン・ボゾン自体と状態 α および β，そしてそれらから低エネルギーのゴールドストン・ボゾンとの相互作用によって生成されるその他の任意の粒子状態だ．この有効場理論の正当化を援用すれば，カレント代数の複雑さと苦闘する必要もなくなる．より重要なことは，現代的な有効場理論の方法は低エネルギー極限を越える結果を与え，ど

のような固有の対称性の破れも系統的に取り扱うことを可能にすることだ.

この方法に従えば, パイ中間子の相互作用振幅をエネルギーについて任意の次数まで計算するには, (19.5.12) と (19.5.14) に従って変換するパイ中間子場 $\vec{\zeta}$ を含む最も一般的なラグランジアン,

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{F^2}{2}\vec{D}_\mu\vec{D}^\mu - \frac{c_4}{4}(\vec{D}_\mu\vec{D}^\mu)^2 - \frac{c_4'}{4}(\vec{D}_\mu\cdot\vec{D}_\nu)(\vec{D}^\mu\cdot\vec{D}^\nu) - \cdots \tag{19.5.19}$$

を使わなければならない. 「$\cdots$」で表された項は共変微分 $\vec{D}_\mu$ の高次冪あるいは高階共変微分を含む. その一般的構造は次節で述べる. 係数 c_4 と c_4' は無次元で, 他の全ての高次項の係数の次元は質量の負冪だ.

任意個の入ってくるパイ中間子と出ていくパイ中間子を含む一般的な過程を考える. それらのエネルギーと運動量は全てせいぜい, 量子色力学の典型的なエネルギー (例えば核子や ρ の質量) に比べて小さなある値 Q の程度とする. (19.5.19) のようなラグランジアンは通常の意味ではくりこみ可能ではないが, 12.3 節で見たようにそのようなラグランジアンは, 理論の対称性から許される全ての可能な項を含むかぎり, 有限な結果を出すことができる. なぜならその場合にはあらゆる無限大を打ち消すのに必要なだけの相殺項が存在するからだ. Q の程度のエネルギーでのゴールドストン・ボゾンの種々の振幅の値を指定することによって, 定数 F^2, c_4, c_4', ... のくりこまれた値を定義すると, 運動量空間のファインマン・ダイアグラムにおける積分は, 同じく Q の程度の仮想的運動量からの寄与が主要になる. (なぜなら, くりこみによりそれらは有限になり, 理論にはそれ以外に可能な有効切断が無いからだ.) すると Q についての冪級数展開として摂動論を展開できる.

各相互作用頂点の各々の微分, つまり各 $\vec{D}_\mu$ はダイアグラムの大き

さに Q の因子 1 個の寄与をし, パイ中間子の内線の各プロパゲータは因子 Q^{-2} の寄与をし, またダイアグラムのループにともなう積分の各体積 d^4q は因子 Q^4 の寄与をする. よって一般的な連結ダイアグラムは,

$$\nu = \sum_i V_i d_i - 2I + 4L \tag{19.5.20}$$

として Q^ν の程度の寄与をする. ここで d_i は種類 i の相互作用での微分の数, V_i はダイアグラム中の種類 i の相互作用頂点の数, I はパイ中間子の内線の数, L はループの数だ. これらの量はお馴染みのトポロジー的恒等式 ((4.4.7) を見よ),

$$L = I - \sum_i V_i + 1 \tag{19.5.21}$$

で関係しているので, I を消去して,

$$\nu = \sum_i V_i(d_i - 2) + 2L + 2 \tag{19.5.22}$$

と書くことができる. ここで重要な点はこの式の各項が正だということだ. つまり (19.5.19) の各相互作用は微分を少なくとも 2 個含み, もちろん $L \geq 0$ だ. したがって, 各過程の主要項は Q^2 の程度の大きさで, それは (19.5.19) の微分を 2 個だけ含む項,

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{F^2}{2}\,\vec{D}_\mu \vec{D}^\mu = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial_\mu \vec{\pi}\partial^\mu \vec{\pi}}{(1+\vec{\pi}^2/F^2)^2} \tag{19.5.23}$$

のみから作られる (つまり $d_i \neq 2$ については $V_i = 0$ の) 樹木ダイアグラム (つまり $L = 0$) だけから生じる. 例えば, パイ中間子・パイ中間子散乱の S 行列要素,

$$S = i(2\pi)^4\delta^4(p_A + p_B - p_C - p_D)M(2\pi)^{-6}(16E_AE_BE_CE_D)^{-1/2} \tag{19.5.24}$$

に現れる不変振幅 M はこの次数では,

$$M_{abcd}^{(\nu=2)} = 4F^{-2}\Big[\delta_{ab}\delta_{cd}(-p_A\cdot p_B - p_C\cdot p_D) + \delta_{ac}\delta_{bd}(p_A\cdot p_C + p_B\cdot p_D) + \delta_{ad}\delta_{bc}(p_A\cdot p_D + p_B\cdot p_C)\Big] \tag{19.5.25}$$

で与えられる. ここで a, b, c, d はそれぞれパイ中間子 A, B, C, D のアイソベクトルの添字だ. (パイ中間子の質量がゼロでないことによる効果はこの節のもう少し後で取り上げる.) 主要項として (19.5.25) を使うことは元のラグランジアン (19.5.1) の結合定数 λ が小さいという仮定にはまったく依らないし, ラグランジアンがこの形をしているか否かにさえ依らず, パイ中間子の典型的なエネルギー Q が小さいという仮定にのみ依る.

任意のゴールドストン. ボゾン相互作用の振幅の次の項は Q^4 の次数で, ラグランジアン (19.5.23) のみを含む 1 ループ・ダイアグラムと, 相互作用 (19.5.23) に (19.5.19) の $d=4$ から来る 1 頂点を加えたものだけで作られる樹木ダイアグラムとの両方から生じる.

$$M_{abcd}^{(\nu=4)} = \frac{\delta_{ab}\delta_{cd}}{F^4}\Bigg[-\frac{1}{2\pi^2}\, s^2\ln(-s) - \frac{1}{12\pi^2}\,(u^2 - s^2 + 3t^2)\ln(-t) - \frac{1}{12\pi^2}\,(t^2 - s^2 + 3u^2)\ln(-u) + \frac{1}{3\pi^2}(s^2 + t^2 + u^2)\ln\Lambda^2 - \frac{1}{2}\,c_4 s^2 - \frac{1}{4}\,c_4'(t^2 + u^2)\Bigg] + [\text{交差項}]\,. \tag{19.5.26}$$

ここで [交差項] は交換 $B \leftrightarrow C$ および $B \leftrightarrow D$ で得られる項を表す. また s, t, u は以下のマンデルシュタム変数だ.

$$s = -(p_A + p_B)^2,\ t = -(p_A - p_C)^2,\ u = -(p_A - p_D)^2\,.$$

この結果は切断 Λ に依存しているが, それは定数 c_4 と c_4' の再定義

で取り除くことができる. くりこまれた結合は,

$$c_{4R} = c_4 - \frac{2}{3\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right) , \tag{19.5.27}$$

$$c'_{4R} = c'_4 - \frac{4}{3\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right) \tag{19.5.28}$$

で, μ は対数をよく定義するために挿入された Q の程度の任意のくりこみのスケールだ. これらのくりこまれた結合を使うと, 振幅 (19.5.26) は以下の形をとる.

$$\begin{aligned} M^{(\nu=4)}_{abcd} = \frac{\delta_{ab}\delta_{cd}}{F^4} \Bigg[&- \frac{1}{2\pi^2}\, s^2 \ln\left(\frac{-s}{\mu^2}\right) \\ &- \frac{1}{12\pi^2}\,(u^2 - s^2 + 3t^2)\ln\left(\frac{-t}{\mu^2}\right) \\ &- \frac{1}{12\pi^2}\,(t^2 - s^2 + 3u^2)\ln\left(\frac{-u}{\mu^2}\right) \\ &- \frac{1}{2}\, c_{4R}s^2 - \frac{1}{4}\, c'_{4R}(t^2 + u^2)\Bigg] + [\text{交差項}] . \end{aligned} \tag{19.5.29}$$

この種の計算は Q の任意の次数まで実行でき, 各次数で常に有限個の新しい結合が登場し, そのくりこみにより物理的振幅の切断依存性を取り除くことができる. $\nu = 2$ の主要項と $\nu = 4$ の補正項との比は $Q^2/8\pi^2F^2$ の程度なので, この展開はパイ中間子のエネルギーが全て $2\pi F$ の程度以下であるかぎり有用だと思われる.

この摂動展開を使うと, 普遍的なパラメータ F をパイ中間子の崩壊振幅 F_π の測定値と関係付けることができる. $\vec{\zeta}$ の変換則 (19.5.14) から, 軸性ベクトル・カレントは,

$$\vec{\epsilon}\cdot\vec{A}^\mu = - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\vec{\zeta})}\cdot\delta\vec{\zeta}$$

で与えられ,

$$\vec{A}^\mu = - (1 - \vec{\zeta}^2)\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\vec{\zeta})} - 2\vec{\zeta}\,\vec{\zeta}\cdot\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\vec{\zeta})}\right) \tag{19.5.30}$$

となる. (この $\vec{A}^\mu$ は $2\vec{x}$ によって生成される対称性のネーター・カレントだ. この生成子は核子 2 重項の場合は $2\gamma_5\vec{t} = \gamma_5\vec{\tau}$ で表される.) 他の場を全て積分してしまった後, (19.5.17) を使って $\vec{\zeta}$ を正準的に規格化されたパイ中間子場 $\vec{\pi}$ で表すと,

$$\vec{A}^\mu = F\left[\partial^\mu\vec{\pi}\frac{(1-\vec{\pi}^2/F^2)}{(1+\vec{\pi}^2/F^2)} + \frac{2\vec{\pi}(\vec{\pi}\cdot\partial^\mu\vec{\pi})}{F^2(1+\vec{\pi}^2/F^2)^2}\right] + \cdots \tag{19.5.31}$$

が得られる. 上記のパイ中間子のエネルギーの冪での摂動展開を使って $\langle \mathrm{VAC}|\vec{A}^\mu|\pi\rangle$ を計算すると, 最低次でパイ中間子の崩壊振幅が,

$$F_\pi = F \tag{19.5.32}$$

であることが分かる. さらに, ローレンツ不変性と (19.5.22) より高次補正は p_π^2/F_π^2 の冪に比例しなければならないが, それは質量ゼロのパイ中間子の場合ゼロになるので, (19.5.32) は $m_\pi \to 0$ の極限で実際に厳密だ. したがってここでの摂動展開は $2\pi F_\pi = 1200$ MeV 程度以下のパイ中間子のエネルギーについては有用だと考えてよい.

実験と比較するためには, パイ中間子の質量がゼロでないという事実を考慮しなければならない. 質量殻上ではパイ中間子の 4 元運動量の時間成分が m_π 以下となることは不可能なので, パイ中間子の典型的なエネルギーと運動量 Q の冪を数える際には, m_π を Q の程度の量と見なさなければならない. しかし前節で見たように m_π^2 はクォークの質量の線形結合に比例するので, 与えられたファインマン・ダイアグラムの次数 Q^ν の式 (19.5.22) は,

$$\nu = \sum_i V_i(d_i + 2m_i - 2) + 2L + 2 \tag{19.5.33}$$

とすべきだ. ここで m_i は種類 i の相互作用のクォーク質量の因子の個数だ.

クォークの質量を含む相互作用はその $SU(2)\times SU(2)$ またはこれと同等な $SO(4)$ 変換性で区別できる. (19.4.34) よりクォーク質量の 1

次の項は二つのスカラー, つまり係数 $m_u + m_d$ を持つカイラル 4 元ベクトル Φ_n^+ の第 4 成分と係数 $m_u - m_d$ を持つ別のカイラル 4 元ベクトル Φ_n^- の第 3 成分との線形結合として変換する. したがって, 有効ラグランジアンの $m_u + m_d$ と $m_u - m_d$ について 1 次の項 $\Delta\mathcal{L}^+$ と $\Delta\mathcal{L}^-$ は, それぞれカイラル 4 元ベクトルの第 4 および第 3 成分の変換性とローレンツ・スカラーの変換性を持たなければならない. 第 4 成分がスカラーであるカイラル 4 元ベクトルの明らかな候補の一つはこの節で最初に現れた ϕ_n だ. (19.5.9) よりその第 4 成分はちょうど $\sigma(1-\vec{\zeta}^2)/(1+\vec{\zeta}^2)$ だ. 因子 σ は, カイラル・スカラーであってこの量のカイラル変換性には影響しないので, 落としてもよい. この項の規格化は, $\vec{\pi}^2 = F_\pi^2 \vec{\zeta}^2$ の係数が $-m_\pi^2/2$ となるように要求することで決めることができる. つまり, 付加的な定数を除いて,

$$\Delta\mathcal{L}^+ = -\frac{m_\pi^2 F_\pi^2}{2}\frac{\vec{\zeta}^2}{1+\vec{\zeta}^2} = -\frac{m_\pi^2}{2}\frac{\vec{\pi}^2}{1+\vec{\pi}^2/F_\pi^2} \qquad (19.5.34)$$

となる. 次節で見るように, これは微分を含まないパイ中間子場のスカラー関数のうちカイラル 4 元ベクトルの第 4 成分として変換する唯一のものだ. 他方, カイラル 4 元ベクトルの第 3 成分として変換し微分を含まないパイ中間子場のスカラー関数は存在しない. なぜなら, そのような関数はカイラル 4 元ベクトルの第 3 成分ならばパイ中間子場の奇関数でなければならず, したがってスカラーではなく擬スカラーでなければならないからだ. したがって (19.5.34) は $d_i = 0$ で $m_i = 1$ の唯一の相互作用だ. アイソスピン不変性を破る u クォークと d クォークの質量差が, 前節で見たようにパイ中間子の質量には影響を及ぼさないばかりか, 微分を含まないどのような多パイ中間子相互作用にも影響を及ぼさないことは驚きだ.

今や, パイ中間子・パイ中間子散乱振幅の主要な $\nu = 2$ の項の現実的な計算が可能だ. (19.5.33) によれば, これらの項は (19.5.23) の $d = 2$, $m = 0$ パイ中間子相互作用または (19.5.34) の $d = 0$, $m = 1$

パイ中間子相互作用から作られる樹木ダイアグラムのみから寄与がある. この次数まででは, (19.5.24) で定義される不変振幅 M は,

$$M_{abcd}^{(\nu=2)} = 4F_\pi^{-2}\left[\delta_{ab}\delta_{cd}(s-m_\pi^2)+\delta_{ac}\delta_{bd}(t-m_\pi^2)+\delta_{ad}\delta_{bc}(u-m_\pi^2)\right] \tag{19.5.35}$$

となる. よって特に $s=4m_\pi^2$, $t=u=0$ の閾値では,

$$\begin{aligned} M_{abcd}^{(\nu=2)}(\text{閾値}) &= 4m_\pi^2F_\pi^{-2}[3\delta_{ab}\delta_{cd}-\delta_{ac}\delta_{bd}-\delta_{ad}\delta_{bc}] \\ &= 4m_\pi^2F_\pi^{-2}\left[7\,M_{ab,cd}^{(0)}-2\,M_{ab,cd}^{(2)}\right] \end{aligned} \tag{19.5.36}$$

となる. ここで $M^{(0)}$ と $M^{(2)}$ はアイソスピン $T=0$ と $T=2$ を持つ 2 パイ中間子状態を表す以下のテンソルで $\mathrm{Tr}M^{(T)}=2T+1$ に規格化されている.

$$M_{ab,cd}^{(0)} = \tfrac{1}{3}\,\delta_{ab}\delta_{cd} \tag{19.5.37}$$

$$M_{ab,cd}^{(2)} = \tfrac{1}{2}\,\left(\delta_{ac}\delta_{bd}+\delta_{ad}\delta_{bc}-\tfrac{2}{3}\,\delta_{ab}\delta_{cd}\right)\,. \tag{19.5.38}$$

通常この結果は散乱半径を使って表される. 3.6 節と 3.7 節にしたがって, アイソスピン T の状態の 2 パイ中間子の散乱半径 a_T は (19.5.36) の $M^{(T)}$ の係数に $1/32\pi m_\pi$ をかけたもので与えられる.[27]

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{7m_\pi}{8\pi F_\pi^2} = 0.16\,m_\pi^{-1}\,, \\ a_2 &= -\frac{m_\pi}{4\pi F_\pi^2} = -0.046\,m_\pi^{-1}\,. \end{aligned}$$

パイ中間子の散乱半径は測定が難しいが, $\pi+N\to\pi+\pi+N$ や $K\to\pi+\pi+e+\nu$ のような過程の注意深い研究から a_0 と a_2 についてそれぞれ $(0.26\pm0.05)\,m_\pi^{-1}$ と $(-0.028\pm0.012)\,m_\pi^{-1}$ という, これらの理論値と矛盾しない結果が得られている.[28] $m_\pi/2\pi F_\pi$ について高次の補正によりこの一致は改善されるようだ.

この形式を拡張してパイ中間子と核子やその他の粒子との相互作用を記述することができる. 最も容易な方法は, 最初のラグランジアン

に以下の核子 2 重項の場 N を含む項を加えることだ.

$$\mathcal{L}_N = -\bar{N}\Big(\partial\!\!\!/ + g[\phi_4 + 2i\vec{t}\cdot\vec{\phi}\gamma_5]\Big)N \, . \tag{19.5.39}$$

ここで $\vec{t}$ はアイソスピン 1/2 の アイソスピン行列ベクトル (つまりパウリ・スピノル $\vec{\tau}$ の 1/2) だ. これはカイラル $SU(2)\times SU(2)$ 変換,

$$\delta\vec{\phi} = 2\vec{\epsilon}\phi_4 \, , \qquad \delta\phi_4 = -2\vec{\epsilon}\cdot\vec{\phi} \, , \tag{19.5.40}$$

$$\delta N = -2i\gamma_5\vec{\epsilon}\cdot\vec{t}N \tag{19.5.41}$$

のもとで不変だ. 非微分パイ中間子結合を消去するために, 核子場 N を新しい核子場 $\tilde{N}$ に作用する表現 (19.5.41) での $SO(4)$ 回転 R として次のように表さなければならない.

$$N \equiv \frac{(1-2i\gamma_5\vec{t}\cdot\vec{\zeta})}{\sqrt{1+\vec{\zeta}^2}}\,\tilde{N} \, . \tag{19.5.42}$$

ここで $\vec{\zeta}$ は (19.5.7) で与えられる. この変換によって (19.5.39) の非微分項は以下のように $\tilde{N}$ と σ のみに依存する.

$$\bar{N}[\phi_4 + 2i\vec{t}\cdot\vec{\phi}\gamma_5]N = \sigma\bar{\tilde{N}}\tilde{N} \, .$$

他方, 微分項は (19.5.42) の行列の微分を含み, 核子のラグランジアンは,

$$\mathcal{L}_N = -\bar{\tilde{N}}\left[\partial\!\!\!/ + g\sigma + 2i\,\frac{\vec{t}\cdot(\vec{\zeta}\times\partial\!\!\!/\vec{\zeta})}{1+\vec{\zeta}^2} + 2i\gamma_5\vec{t}\cdot\vec{D\!\!\!\!/}\right]\tilde{N} \, , \tag{19.5.43}$$

あるいは正準的に規格化されたパイ中間子場 (19.5.17) を使って,

$$\mathcal{L}_N = -\bar{\tilde{N}}\left[\partial\!\!\!/ + g\sigma + \frac{2i\vec{t}\cdot(\vec{\pi}\times\partial\!\!\!/\vec{\pi})}{F_\pi^2[1+\vec{\pi}^2/F_\pi^2]} + \frac{2i\gamma_5\vec{t}\cdot\partial\!\!\!/\vec{\pi}}{F_\pi[1+\vec{\pi}^2/F_\pi^2]}\right]\tilde{N} \tag{19.5.44}$$

となる. σ はゼロでない真空期待値を持つので, 核子はここではゼロでない静止質量を持つ. この結果は, もし (19.5.40), (19.5.41) のもとでの対称性が破れていなければ, 禁止されるはずのものだ.

その作り方から, ラグランジアン (19.5.44) はカイラル不変だ. これは, 以前に得られた σ と $\vec{\pi}$ のカイラル変換性を使い, またカイラル変換 (19.5.40), (19.5.41) のもとで (19.5.42) で定義された新しい核子場が,

$$\delta\tilde{N} = 2i\vec{t}\cdot[\vec{\zeta}\times\vec{\epsilon}]\tilde{N} \tag{19.5.45}$$

と変換することに留意すれば, 直接見ることができる. すなわち, カイラル変換のもとで $\tilde{N}$ は単に $\vec{D}_\mu$ と同じアイソスピン回転 (19.5.15) を受ける. ただし, もちろんそれは $T = 1/2$ 表現の回転だ. アイソスピン回転のパラメータ $\vec{\zeta}\times\vec{\epsilon}$ は時空に依存するので, $\tilde{N}$ の微分は同じカイラル変換性は持たないが, (19.5.43) の第 1 項と第 3 項は合わせてカイラル共変微分として振舞うことが容易に確認できる. すなわち,

$$\delta\mathcal{D}_\mu\tilde{N} = 2i\vec{t}\cdot[\vec{\zeta}\times\vec{\epsilon}]\mathcal{D}_\mu\tilde{N} \tag{19.5.46}$$

となる. ここで, 以下の定義を使った.

$$\mathcal{D}_\mu\tilde{N} \equiv \left[\partial_\mu + 2i\,\frac{\vec{t}\cdot(\vec{\zeta}\times\partial_\mu\vec{\zeta})}{1+\vec{\zeta}^2}\right]\tilde{N}\,. \tag{19.5.47}$$

よってラグランジアン (19.5.43) は (したがって (19.5.44) も) 明白にカイラル不変だ. なぜならそれはアイソスピン不変であり, また $\tilde{N}$, $\mathcal{D}_\mu\tilde{N}$, σ, $\vec{D}_\mu$ だけから構成されているが, それらはカイラル変換のもとで全て同じアイソスピン回転のように変換するからだ.

ここでの最初の特定のラグランジアンは前と同様に重要ではない. 以前に考察したパイ中間子のみの理論の場合と同様に, 重要なのはラグランジアンのカイラル不変性だ. カイラル不変性を保つには, ラグランジアンはアイソスピンを保存し, $\tilde{N}$, $\mathcal{D}_\mu\tilde{N}$, $\vec{D}_\mu$ (およびこれらの高

階共変微分) だけから構成されなければならない. 新しい核子場について双 1 次で 2 回以上の微分を含まない最も一般的なカイラル不変なラグランジアンは,

$$\mathcal{L}_{N,0} = -\bar{\tilde{N}}\left[\not{\mathcal{D}} + m_N \ + \ 2ig_A\gamma_5\vec{t}\cdot\not{\vec{D}}\right]\tilde{N}\ , \tag{19.5.48}$$

あるいは (19.5.17) のパイ中間子場を使えば,

$$\mathcal{L}_{N,0} = -\bar{\tilde{N}}\left[\not{\partial} + m_N + \frac{2i\vec{t}\cdot(\vec{\pi}\times\not{\partial}\vec{\pi})}{F_\pi^2[1+\vec{\pi}^{\,2}/F_\pi^2]} + \frac{2ig_A\gamma_5\vec{t}\cdot\not{\partial}\vec{\pi}}{F_\pi[1+\vec{\pi}^{\,2}/F_\pi^2]}\right]\tilde{N} \tag{19.5.49}$$

の形をとる.

(19.5.48) の最後の項に任意定数 g_A を挿入したのは, この項が単独でカイラル対称なのでカイラル対称性からはその係数が決まらないからだ. (これは (19.5.43) の第 3 項とは状況が異なる. この項の係数はそれが第 1 項と合わせてカイラル不変になるという条件で決まっているからだ.) ここで挿入された定数 g_A が実際にベータ崩壊の軸性ベクトル結合であることは, 核子を含むラグランジアン (19.5.48) から出てくる軸性ベクトル・カレントに付け加わる項を作ってみれば確認できる. あるいは, 部分積分してからディラック方程式を使うと, パイ中間子・核子相互作用 $-2ig_A\bar{\tilde{N}}\gamma_5\vec{t}\cdot(\not{\partial}\vec{\pi})\tilde{N}/F_\pi$ は核子の質量殻上で相互作用 $-4im_Ng_A\bar{\tilde{N}}\gamma_5\vec{t}\cdot\vec{\pi}\tilde{N}/F_\pi$ に同等だ. これはパイ中間子・核子結合定数が,

$$G_{\pi N} = 2m_Ng_A/F_\pi$$

となることに対応し, それはまさにゴールドバーガー・トライマンの関係式 (19.4.33) だ.

ついでに言えば, もしこの計算でラグランジアン (19.5.44) を使っていたなら, $g_A = 1$ のゴールドバーガー・トライマン関係式が得られたであろう. しかし, この結果は実際には最初の相互作用が特別な形

(19.5.39) をしていることによる人為的なものだ. 最初から非くりこみ可能な微分結合の項,**

$$\mathcal{L}'_N = ig'\bar{N}\Big[(\vec{t}\cdot\vec{\phi}\partial\!\!\!/\phi_4 - \phi_4\vec{t}\cdot\partial\!\!\!/\vec{\phi})\gamma_5 + \vec{t}\cdot(\vec{\phi}\times\partial\!\!\!/\vec{\phi})\Big]N \qquad (19.5.50)$$

を含めることもできた. これは変換した場 $\sigma, \tilde{N}, \vec{\zeta}$ で表すと以下の形になることが容易に示せる.

$$\mathcal{L}'_N = -8i\sigma^2 g'\bar{\tilde{N}}\vec{t}\cdot\vec{D\!\!\!/}\gamma_5\tilde{N}\ .$$

σ は真空期待値を持つので, これは g' に比例する寄与をパイ中間子・核子結合定数と g_A とに与える. したがって破れた $SU(2)\times SU(2)$ 対称性だけから $g_A=1$ とは決まらない. 相互作用 (19.5.50) を取り入れて g' を調節することで, g_A を任意の値に設定できる.

次にこのラグランジアンを使ってパイ中間子と核子の両方を含む反応の振幅を計算しよう. 核子はパイ中間子のように「低エネルギー」の粒子にはなれないので, 核子のプロパゲータには特別の注意を払わなければならない. 質量殻上の m_N の程度の 4 元運動量 p を持ってダイアグラムに入り, それから低エネルギー・パイ中間子との相互作用で全体として m_N よりずっと小さな 4 元運動量 q を吸収した核子の線はプロパゲータ,

$$\frac{-i(p\!\!\!/ + q\!\!\!/) + m_N}{(p+q)^2 + m_N^2} \underset{q\to 0}{\longrightarrow} \frac{-ip\!\!\!/ + m_N}{2p\cdot q} \qquad (19.5.51)$$

を持つ. (無視した項は核子のラグランジアンに高階微分項を含めることで取り入れることができる.) ふたたび, 全ての外線のパイ中間子

**核子 2 重項の右手成分と左手成分はそれぞれ $SU(2)\times SU(2)$ の $(\frac{1}{2},0)$ 表現と $(0,\frac{1}{2})$ 表現に従って変換する. したがって, 双 1 次式 $\bar{N}\gamma_\mu\gamma_5 N$ は $(\frac{1}{2},0)$ または $(0,\frac{1}{2})$ 項について 2 次の項の和で, (1,0), (0,0), (0,1) 表現の直和のように変換する. (19.5.50) では $\bar{N}\gamma_\mu\gamma_5 N$ の $(1,0)+(0,1)$ 項を $SU(2)\times SU(2)$ の 4 元ベクトル ϕ_n と $\partial_\mu\phi_n$ から作られる反対称テンソルに結合させた. (19.5.40), (19.5.41) のもとでのその不変性はもちろん直接確かめることができる.

の 4 元運動量はせいぜい Q の大きさの程度の成分しか持たず, 全てのくりこまれた結合を Q の程度の大きさのくりこみ点で定義して, パイ中間子の内線もまた 4 元運動量 Q を持つように積分が収斂するとする. すると, (19.5.51) より核子の内線は $1/Q$ の程度の寄与をする. そのような過程の一般的なファインマン・ダイアグラムは不変振幅に Q^ν の程度の寄与をする. ただし今度は,

$$\nu = \sum_i V_i(d_i + 2m_i) - 2I_\pi - I_N + 4L \tag{19.5.52}$$

となる. ここで V_i は種類 i の相互作用頂点の数 d_i はそのような各相互作用での微分の数, m_i は各相互作用でのクォーク質量の因子の数, I_π と I_N はそれぞれパイ中間子と核子の内線の数, L はダイアグラム中のループの数だ. 連結ダイアグラムにおけるお馴染みのトポロジー的関係式,

$$L = I_\pi + I_N - \sum_i V_i + 1 \tag{19.5.53}$$

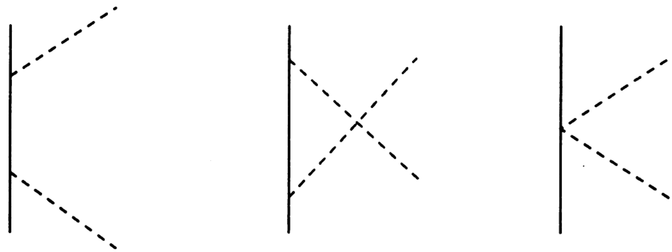
と,

$$2I_N + E_N = \sum_i V_i n_i \tag{19.5.54}$$

を使う. ここで n_i は種類 i の相互作用での核子場の数, E_N は核子の外線の数だ. これを使って I_N と I_π を消去すると,

$$\nu = \sum_i V_i \left(d_i + 2m_i + \frac{n_i}{2} - 2\right) + 2L - \frac{E_N}{2} + 2 \tag{19.5.55}$$

が得られる. ここで重要な点は, 第 1 項の係数 $d_i + 2m_i + \frac{1}{2}n_i - 2$ は常に正かゼロであることだ. すでに見たように $n_i = 0$ のパイ中間子だけの相互作用では $d_i + 2m_i \geq 2$ であり, (19.5.49) を見れば分かるように $n_i = 2$ と $m_i = 0$ のパイ中間子・核子相互作用では $d_i \geq 1$ だ. $n_i = 2$ かつ $m_i \geq 1$, または $n_i \geq 4$ のどの相互作用も明らかに $d_i + 2m_i + \frac{1}{2}n_i \geq 2$ だ. したがって $Q \ll 2\pi F_\pi$ のとき主要項は樹木ダ



(a) (b) (c)

図 19.3: 核子による低エネルギー・パイ中間子の散乱を計算するために有効カイラル・ラグランジアンとともに使われるファインマン・ダイアグラム. 破線はパイ中間子で実線は核子だ.

イアグラム (すなわち $L = 0$) で, その全ての相互作用が,

$$d_i + 2m_i + \frac{n_i}{2} - 2 = 0$$

を満たすものだ. この条件を満たす相互作用はちょうど (19.5.23), (19.5.34), (19.5.49) に陽に示された相互作用の他に, $d_i = 0$ と $n_i = 4$ を満たす以下の相互作用が可能だ.

$$\left(\bar{\tilde{N}}\Gamma_\alpha\tilde{N}\right)\left(\bar{\tilde{N}}\Gamma^\alpha\tilde{N}\right). \qquad (19.5.56)$$

ここで Γ_α と Γ^α はローレンツ, 空間反転, アイソスピンについて不変な 4 体フェルミ相互作用を生じるスピン空間とアイソスピン空間の任意の行列だ. この最後の相互作用は多核子過程[29]で重要だが, ここでは考えない.

さてこの方法をパイ中間子・核子散乱に適用しよう. パイ中間子のエネルギーが大ざっぱに言って m_π の程度のとき, パイ中間子・核子散乱振幅は図 19.3 のファインマン・ダイアグラムで与えられ, それらは全て不変振幅に m_π 程度の寄与をする. しかし, 閾値では主要な寄

与は図 19.3(c) からのもので他の図からの寄与は余分な因子 m_π/m_N だけ小さくなる. これは, 重心系での閾値では入ってくるパイ中間子と出ていくパイ中間子の 4 元運動量 q, q' および入ってくる核子と出ていく核子の 4 元運動量 p, p' は,

$$q = q' = (0,0,0,m_\pi) = \left(\frac{m_\pi}{m_N}\right) p = \left(\frac{m_\pi}{m_N}\right) p' \tag{19.5.57}$$

で与えられるからだ. したがって閾値での不変振幅への図 19.3(a) や 19.3(b) からの寄与は,

$$\begin{aligned}
&\bar{u}\gamma_5 \not{q}\, \frac{(-i(\not{p} \pm \not{q}) + m_N)}{(p \pm q)^2 + m_N^2}\, \gamma_5 \not{q} u \\
&= \frac{m_\pi^2\, \bar{u}\gamma_5(-i\not{p}(1 \pm m_\pi/m_N) + m_N)\gamma_5 u}{(\mp 2m_\pi m_N - m_\pi^2)} \\
&= \frac{\mp m_\pi}{2m_N \pm m_\pi}\, \bar{u}(i\not{p}(1 \pm m_\pi/m_N) + m_N)u = \frac{m_\pi^2}{2m_N \pm m_\pi}
\end{aligned}$$

に比例する. ここで u は $\bar{u}u = 1$ を満たすディラック・スピノルだ. これに比べて, 図 19.3(c) のダイアグラムの M への寄与は m_π の程度だ. この振幅は核子のアイソスピンの添字についての 2×2 行列として次のように書くことができる.

$$M_{ba} = \frac{-2i}{F_\pi^2}\, t_c \epsilon_{abc}\, \bar{u}(-i\not{q} - i\not{q}')u \,.$$

ここで q' と q は終状態と始状態のパイ中間子の 4 元運動量で b と a は対応するアイソベクトルの添字だ. (19.5.57) と運動量空間でのディラック方程式 $(i\not{p} + m_N)u = 0$ を使うと, これは,

$$M_{ba} = \frac{-4im_\pi}{F_\pi^2}\, t_c\, \epsilon_{abc} = \frac{-4m_\pi}{F_\pi^2}\, \vec{t} \cdot [\vec{t}^{(\pi)}]_{ba} \tag{19.5.58}$$

となる. ここで $[t_c^{(\pi)}]_{ba} \equiv -i\epsilon_{bac}$ はパイ中間子のアイソベクトル行列だ. 行列 $\vec{t}\cdot\vec{t}^{(\pi)}$ は全アイソスピン T の状態では固有値 $\frac{1}{2}[T(T+1) - 2 - \frac{3}{4}]$

を持つので，二つのアイソスピン状態 $T = 1/2$ と $T = 3/2$ では不変振幅は次のようになる.[30]

$$M_{1/2} = 4m_\pi/F_\pi^2\,, \qquad M_{3/2} = -2m_\pi/F_\pi^2\,.$$

これらの結果は通常散乱半径で表され，以下のように不変振幅を $4\pi(1+m_\pi/m_N)$ で割ったもので定義される.

$$a_{1/2} = \frac{m_\pi}{\pi F_\pi^2(1+m_\pi/m_N)} = 0.15\,m_\pi^{-1}\,, \tag{19.5.59}$$

$$a_{3/2} = -\frac{m_\pi}{2\pi F_\pi^2(1+m_\pi/m_N)} = -0.075\,m_\pi^{-1}\,. \tag{19.5.60}$$

これらは実験値[12] $a_{1/2} = (0.173\pm0.003)\,m_\pi^{-1}$ および $a_{3/2} = (-0.101\pm0.004)\,m_\pi^{-1}$ にかなり一致している. ((19.5.59) と (19.5.60) の結果は m_π/m_N の最低次で正しいだけだが，因子 $1+m_\pi/m_N$ は単に散乱半径の定義から来ているだけなので保持しておく.)

散乱半径への m_π の次の次数の補正に寄与するものはいくつかある. それには図 19.3(a) と 19.3(b) のボルン・ダイアグラムが含まれ，これは通常は主要項だが，上で見たように閾値では余分な因子 m_π/m_N だけ小さくなる. その他に，微分を 2 個持つ頂点を含む樹木ダイアグラムもある. また，興味深いのは，m_π^2 に比例し対称性を破る相互作用から生じる非微分型の頂点を含む樹木ダイアグラムだ. これらの相互作用は (19.4.34) の演算子，すなわち二つの別のカイラル 4 元ベクトル Φ_n^+ と Φ_n^- の第 4 成分と第 3 成分のカイラル変換性と時空変換性を持たなければならない. 核子場について双 1 次のそのような演算子の候補が明らかに二つある. すなわち Φ_4^+ 項,

$$\bar{N}N = \left(\frac{1-\vec{\zeta}^2}{1+\vec{\zeta}^2}\right)\bar{\tilde{N}}\tilde{N} - 4i\left(\frac{\vec{\zeta}}{1+\vec{\zeta}^2}\right)\cdot\bar{\tilde{N}}\gamma_5\vec{t}\tilde{N}$$

と Φ_3^- 項,

$$\bar{N}t_3N = \bar{\tilde{N}}t_3\tilde{N} - 2\left(\frac{\zeta_3}{1+\vec{\zeta}^2}\right)\bar{\tilde{N}}\vec{t}\cdot\vec{\zeta}\tilde{N} - i\left(\frac{\zeta_3}{1+\vec{\zeta}^2}\right)\bar{\tilde{N}}\gamma_5\tilde{N}$$

だ. カイラル対称性は $\tilde{N}$ に通常のアイソスピン回転のように作用するので, 核子のスカラー双 1 次式と擬スカラー双 1 次式が混合することはあり得ない. したがって実際には二つの独立な Φ_4^+ 演算子,

$$\left(\frac{1-\vec{\zeta}^2}{1+\vec{\zeta}^2}\right)\bar{\tilde{N}}\tilde{N} \tag{19.5.61}$$

と

$$i\left(\frac{\vec{\zeta}}{1+\vec{\zeta}^2}\right)\cdot\bar{\tilde{N}}\gamma_5\vec{t}\tilde{N}\,, \tag{19.5.62}$$

および二つの独立な Φ_3^- 演算子,

$$\bar{\tilde{N}}t_3\tilde{N}-2\left(\frac{\zeta_3}{1+\vec{\zeta}^2}\right)\bar{\tilde{N}}\vec{t}\cdot\vec{\zeta}\tilde{N} \tag{19.5.63}$$

と

$$i\left(\frac{\zeta_3}{1+\vec{\zeta}^2}\right)\bar{\tilde{N}}\gamma_5\tilde{N} \tag{19.5.64}$$

が存在する. 次節で示すように, これらは核子場の双 1 次式で (19.4.34) の各項の変換性を持つ唯一の演算子だ. 演算子 (19.5.62) と (19.5.64) は明らかに, パイ中間子・核子結合についてのゴールドバーガー・トライマンの関係式にアイソスピンを保存する補正とアイソスピンを破る補正を与える. 残りの演算子 (19.5.61) と (19.5.63) は核子の質量と低エネルギーパイ中間子・核子散乱との両方に直接寄与する. 核子の質量への寄与から, これら後者の項は ($\vec{\zeta}$ を通常の規格化されたパイ中間子場で置き換えて) 有効ラグランジアンに以下の形で入ることが分かる.

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_{eff} = &-\frac{\delta m_p+\delta m_n}{2}\left(\frac{1-\vec{\pi}^2/F_\pi^2}{1+\vec{\pi}^2/F_\pi^2}\right)\bar{\tilde{N}}\tilde{N}\\ &-(\delta m_p-\delta m_n)\left[\bar{\tilde{N}}t_3\tilde{N}-\frac{2}{F_\pi^2}\left(\frac{\pi_3}{1+\vec{\pi}^2/F_\pi^2}\right)\bar{\tilde{N}}\vec{t}\cdot\vec{\pi}\tilde{N}\right]\,.\end{aligned} \tag{19.5.65}$$

ここで δm_p と δm_n は陽子と中性子の質量へのクォークの質量項 (19.4.34) の寄与だ．これはパイ中間子・核子散乱振幅に (ふたたび核子のアイソスピン空間での行列で書いて) 以下の寄与をする．

$$\delta M_{ba} = \frac{2[\delta m_p + \delta m_n]}{F_\pi^2}\delta_{ab} + \frac{2[\delta m_p - \delta m_n]}{F_\pi^2}(t_a\delta_{3b} + t_b\delta_{3a}) \,. \tag{19.5.66}$$

(19.5.65) の第 1 項はしばしば「σ 項」と呼ばれる．第 2 項は σ 項へのアイソスピンを破る補正で，荷電交換反応 $\pi^+ + n \to \pi^0 + p$ や $\pi^- + p \to \pi^0 + n$ のような中性パイ中間子を含む過程だけに現れる．核子の質量のずれ $\delta m_{p,n}$ を直接測定することは不可能だが，19.7 節で見るようにその差を $SU(3)$ 対称性を使ってハイペロンの質量差から計算することは可能だ．これより $\delta m_p - \delta m_n = -2.5$ MeV という結果が得られる．残念ながら，(19.5.65) の第 1 項の係数 $\delta m_p + \delta m_n$ の確実な理論的評価はいまだできていない．

(19.4.34) より量子色力学では (19.5.66) の係数 $\delta m_p + \delta m_n$ と $\delta m_p - \delta m_n$ はそれぞれ $m_u + m_d$ と $m_u - m_d$ に比例することが分かる．19.7 節で見るように m_u と m_d はまったく縮退していないので，これらの係数はおおっざぱに言ってほぼ同じ程度の大きさだ．したがって σ 項へのアイソスピンを破る補正は σ 項自体と比べてそれほど小さくはない．アイソスピン保存がハドロン物理で非常によい近似である理由は u クォークと d クォークの質量がほぼ等しいからではなくて単にそれらが小さいからだということが再度分かる．

(19.5.19) や (19.5.49) のようなラグランジアンを使うのは 12.3 節ですでに導入した有効場理論の方法の一例だ．同様な手法は，ストレンジ粒子を含む中間子およびバリオンの相互作用 (19.7 節を見よ) や電弱対称性の破れのスケール以下のエネルギーでのクォークおよびレプトンの相互作用 (21.3 節を見よ)，さらには超伝導を取り扱うのにさえ用いられている．これら全ての場合に有効場の理論は対称性と，場の

量子論の基礎になっている一般原理との結果を導き出すのに最も便利な方法だ.

* * *

破れた対称性から導かれる低エネルギー定理を分散関係とともに用いると有用な和則が得られる. u クォークおよび d クォークの小さな質量とパイ中間子の質量とを無視して, このことがカイラル対称性でいかにうまくいくかを, 見てみよう. アイソベクトルの添字 a と 4 元運動量 q を持つ質量ゼロのパイ中間子が 4 元運動量 p の核子で前方散乱されてアイソベクトルの添字 b を持つパイ中間子になる過程を考えよう. $S_{fi} = -2\pi i\delta^4(P_f - P_i)M_{fi}$ で定義される散乱振幅 M は q の最低次では図 19.3 のファインマン・ダイアグラムから以下のように与えられる.

$$\begin{aligned}-2\pi iM = \frac{1}{(2\pi)^6(2q^0)}\bar{u}\Bigg[&\left(-i\frac{(2\pi)^4 2g_A\gamma_5 t_b\, \not{q}}{F_\pi}\right)\\ &\times\left(\frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{-i(\not{p}+\not{q})+m_N}{(p+q)^2+M^2}\right)\left(i\frac{(2\pi)^4 2g_A\gamma_5 t_a\, \not{q}}{F_\pi}\right)\\ &+\left(i\frac{(2\pi)^4 2g_A\gamma_5 t_a\, \not{q}}{F_\pi}\right)\left(\frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{-i(\not{p}-\not{q})+m_N}{(p-q)^2+M^2}\right)\\ &\times\left(-i\frac{(2\pi)^4 2g_A\gamma_5 t_b\, \not{q}}{F_\pi}\right) - 4i\frac{t_c\epsilon_{abc}\, \not{q}}{F_\pi^2}\Bigg]u\,. \qquad (19.5.67)\end{aligned}$$

q のこの次数では角括弧内の最初の 2 項の核子のプロパゲータは,

$$\frac{-i(\not{p}\pm\not{q})+m_N}{(p\pm q)^2+M^2} \approx \frac{-i\,\not{p}+m_N}{\pm 2p\cdot q}$$

で近似してよい. すると (19.5.67) は, 関係 $\not{q}\,\not{q} = q^2 = 0$, $\not{q}\not{p}\not{q} = 2\not{q}p\cdot q$, $[t_a, t_b] = i\epsilon_{abc}t_c$ を使ってもっと簡単になる. また, 実験室系 (小さな q については重心系に等しい) では $p\cdot q = -m_N\omega$ だ. ここで $\omega \equiv q^0$ は核子の静止系でのパイ中間子のエネルギーだ. 最後に, 通常の前方散乱振幅 (その絶対値の 2 乗は前方散乱の微分断面積に等しい) は (3.6.9)

より $f \equiv -4\pi^2\omega M$ で与えられる．以上を合わせると，パイ中間子のエネルギーが ω での前方散乱振幅は $\omega \ll m_N$ のとき，

$$f_{ba}(\omega) \to -i\frac{\omega}{\pi F_\pi^2}(1-g_A^2)\,\epsilon_{abc}t_c \tag{19.5.68}$$

で与えられることが分かる．特に，π^+・陽子散乱の場合は，規格化されたアイソベクトル $\vec{v}=(1,i,0)/\sqrt{2}$ を用いて (19.5.68) を $v_b^* v_a$ と縮約し，$t_3=+\frac{1}{2}$ と置かなければならない．すると，低エネルギーの前方 π^+・陽子散乱振幅は，

$$f_{\pi^+p}(\omega) \to -\frac{\omega}{2\pi F_\pi^2}(1-g_A^2) \tag{19.5.69}$$

となる．

ところで，質量ゼロの π^+ の陽子による前方散乱の分散関係は (10.8.24) から (引き算多項式を $P(E) \propto E$ として) 以下のように与えられる．

$$f_{\pi^+p}(\omega) = R + \frac{i\omega}{4\pi}\sigma_{\pi^+p}(\omega) + \frac{\omega}{4\pi^2}\int_0^\infty \left[\frac{\sigma_{\pi^+p}(E)}{E-\omega} - \frac{\sigma_{\pi^-p}(E)}{E+\omega}\right] dE\ . \tag{19.5.70}$$

ここで R は必要なら導入しておくべき引き算定数で，ω と E は陽子の静止系でのパイ中間子のエネルギーだ．この分散関係を低エネルギー極限 (19.5.69) と比較すると，$R=0$ および，

$$g_A^2 = 1 + \frac{F_\pi^2}{2\pi}\int_0^\infty \left[\sigma_{\pi^+p}(E) - \sigma_{\pi^-p}(E)\right] dE/E \tag{19.5.71}$$

が得られる．これはカイラル対称性が厳密で $m_\pi = 0$ の場合の有名なアドラー・ワイスバーガーの和則だ．[19] 同様な和則はパイ中間子の，任意のバリオンまたはパイ中間子自身を含む中間子による散乱について導くことができる．[30a]

19.6 有効場の理論: 一般の破れた対称性

前節で述べた $SU(2) \times SU(2)$ が破れて $SU(2)$ になる場合の有効ラグランジアンを作る技法は, 一般の群 G が破れて任意の部分群 H になる場合にすぐに一般化された. 場 $\psi_n(x)$ の時空に依らない通常の線形変換 g,

$$\psi_n(x) \to \sum_m g_{nm}\psi_m(x) \tag{19.6.1}$$

から成る任意のコンパクトなリー群 G をとり, このリー群のもとで不変なラグランジアンを持つ場の量子論を考える. この対称性の群は, 全ての真空期待値を不変に保つ対称性変換の部分群 $H \subset G$ に自発的に破れるとする. すなわち $h \in H$ について,

$$\sum_m h_{nm}\langle\psi_m(x)\rangle_{\text{VAC}} = \langle\psi_n(x)\rangle_{\text{VAC}} \tag{19.6.2}$$

が満たされるとする. (必ずしも ψ の全てがスカラーである必要はないが, もちろんスカラーだけがゼロでない真空期待値を持つことができる.) 前節の最初の例では, G は群 $SO(4)$ で, 場 ψ_n はこの群の 4 元ベクトル表現を成し, その真空期待値は $SO(4)$ を破って 4 軸を不変にする回転から成る部分群 $H = SO(3)$ になった. 一般の場合には, 例えば前節で導入した核子の場の場合にそうであったように, 場 ψ_n は G の既約表現ではなく可約表現であってもよい.

次に場の空間の一般の「点」 ψ_n を, 以下のように質量ゼロのゴールドストン・モードを取り除いた場 $\tilde{\psi}_n$ に G 変換を施したもので表す.

$$\psi_n(x) = \sum_m \gamma_{nm}(x)\tilde{\psi}_m(x)\ . \tag{19.6.3}$$

例えば, 前節では γ は R と名付けた $SO(4)$ 回転で, $\tilde{\psi}_n$ の満たす条件は 4 元ベクトルの最初の 3 成分がゼロになることだった.

この条件をもっと一般的に定式化するために, G の実表現を取り扱うことにする. (このことで一般性が失われることはない. なぜなら, 既

約表現には固執していないので, もし G の複素表現を成す場の組から出発すれば, ψ_n をこれら複素場の実部と虚部にとることは常に可能だからだ.) 19.2 節で示したように, 質量行列の質量ゼロの固有ベクトルは, t^α を G の生成子として, ちょうどベクトル $\sum_m [t^\alpha]_{nm}\langle\psi_m(0)\rangle_{\rm VAC}$ の独立な線形結合だ. (表現が実なので, it^α は実で, また G がコンパクトなのでユニタリー表現, つまり直交表現を選ぶことができる. よって t^α は虚で反対称だ.) したがって $\tilde{\psi}_n$ がゴールドストン・モードを含まないという条件は,

$$\sum_{nm}\tilde{\psi}_n(x)[t^\alpha]_{nm}\langle\psi_m(0)\rangle_{\rm VAC}=0 \tag{19.6.4}$$

と書ける. ここで独立な条件の数は群 G の次元から, $\langle\psi_m(0)\rangle_{\rm VAC}$ に作用するとゼロになる生成子で構成される部分群 H の次元を引いたものだ. このようにして場が取り除かれたゴールドストン・ボゾンは, 前節と同様に, 変換 $\gamma_{nm}(x)$ をパラメータ化するのに必要な dim (G) − dim (H) 個の場にふたたび現れる. 一般に $\tilde{\psi}_n$ は, (前節の核子のような)ゴールドストン・ボゾンと異なる時空対称性を持つ場も入れて, 理論の全ての重い場を含む.

(19.6.4) を満たすように変換 $\gamma_{nm}(x)$ を選ぶことは常に可能だということを示す必要がある. この目的で, 以下の量を考えよう.

$$V_\psi(g)\equiv\sum_{nm}\psi_n\, g_{nm}\langle\psi_m(0)\rangle_{\rm VAC}\,. \tag{19.6.5}$$

ここで g は ψ_n に備わる実直交表現の群 G 全体を動くものとする. この量は明らかに g の連続実数関数で, 群がコンパクトなので $V_\psi(g)$ は g の有界な関数だ. したがって時空の各点 x で $V_{\psi(x)}(g)$ は群のある元で最大値に達するが, その元を $\gamma(x)$ と呼ぶ. $g=\gamma(x)$ で, $V_{\psi(x)}(g)$ は g の任意の変分に関して停留点になっていなければならない. しかし群の元 g のどのような微小なずれも, g に依存してよい実の微小係数

ϵ_α を使って常に線形結合,

$$\delta g = i \sum_\alpha \epsilon_\alpha \, g \, t^\alpha$$

として書ける. したがって $V_{\psi(x)}(g)$ が $g = \gamma(x)$ での変分 δg に関して停留点となる条件は, 次のとおりだ.

$$\begin{aligned} 0 = \delta V_{\psi(x)}\Big(\gamma(x)\Big) &= i \sum_\alpha \epsilon_\alpha \sum_{nml} \psi_n(x) \gamma_{nl}(x) \, t^\alpha_{lm} \langle \psi_m(0) \rangle_{\rm VAC} \\ &= i \sum_\alpha \epsilon_\alpha \sum_{nml} [\gamma^{-1}(x)]_{ln} \psi_n(x) \, t^\alpha_{lm} \langle \psi_m(0) \rangle_{\rm VAC} \, . \end{aligned}$$

これは全ての変分について, したがって全ての ϵ_α について満たされなければならないので, (19.6.4) は $\tilde{\psi}(x) = \gamma^{-1}(x)\psi(x)$ について満たされていることがわかる. これが示すべきことだった. ラグランジアン (19.4.1) を持つボゾンだけの理論では, $\tilde{\psi}_n$ は 4 元ベクトル場 $(0, 0, 0, \sigma)$ だった. これは真空期待値 $\langle \psi_n \rangle$ の方向を向いているが, このことはいつでも正しいわけではない.

ついでに言えば, 複素場を扱う際に $\tilde{\psi}(x)$ への条件を陽に実部と虚部を使って定式化する必要はない. 一組の場 $\chi(x)$ がエルミートな生成子 T^α を持つ G のある複素表現に従って変換するなら, 実表現,

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} {\rm Re}\, \chi(x) \\ {\rm Im}\, \chi(x) \end{pmatrix}$$

では生成子は,

$$i \, t^\alpha = \begin{pmatrix} -{\rm Im}\, T^\alpha & -{\rm Re}\, T^\alpha \\ {\rm Re}\, T^\alpha & -{\rm Im}\, T^\alpha \end{pmatrix}$$

となる. すると条件 (19.6.4) は直接 T^α と $\chi(x)$ を使って,

$${\rm Im}\, \Big(\tilde{\chi}(x)^\dagger \, T^\alpha \, \langle \chi(0) \rangle_{\rm VAC} \Big) = 0$$

と表すことができる.

ラグランジアンは時空に依存しない G 変換のもとで不変だとだけ仮定しているので, 変換 (19.6.3) の後には $\gamma(x)$ と $\tilde{\psi}(x)$ の両方に依存することが分かる. ただし γ に依存する各項は少なくとも 1 回の微分を含まねばならない. すでに指摘したように, $\gamma(x)$ を指定するのに必要な時空に依存するパラメータはゴールドストン・ボゾン場の役割を果たす. 次に $\gamma(x)$ のパラメータ化の方法を考えなければならない.

(19.6.3) の γ の選び方は一般的には最初から一意的なわけではない. $\langle\psi_m(0)\rangle_{\rm VAC}$ は (19.6.2) の意味で H 不変なので, (19.6.5) で定義された $V_\psi(g)$ は破れていない部分群 H の任意の元 h を g に右からかけて不変だ.

$$V_\psi(g) = V_\psi(gh)\,, \qquad \text{ただし} \qquad h \in H\,. \tag{19.6.6}$$

したがって γ が $V_\psi(g)$ を最大にするなら, γh も同様で, よって条件 (19.6.4) は $\tilde{\psi} = \gamma^{-1}\psi$ だけでなく $\tilde{\psi} = h^{-1}\gamma^{-1}\psi$ によっても満たされる. つまり今のところ γ は H の元を右からかける分だけの不定性が残っている. (例えば前節の例では, 4 次元の回転 R は 4 元ベクトルの最初の 3 成分のみに作用する任意の回転を右からかけることができた.) 二つの元 γ_1 と γ_2 は $h \in H$ として $\gamma_1 = \gamma_2 h$ なら同等と考えてよい. これは反射的 (γ は自分自身に同等) で, 対称的 (γ_1 が γ_2 と同等なら γ_2 は γ_1 と同等) で, 推移的 (γ_1 が γ_2 に同等で γ_2 が γ_3 に同等なら γ_1 は γ_3 に同等) なので, 同値関係だ. したがって群 G の元は別々の「同値類」に分類でき, その各々は H の元を右からかける分だけ異なる元 γ から成る. これらは G の H に関する**右剰余類** (right coset) と呼ばれる. 必要なことは右剰余類の空間 (これは G/H と呼ばれる) のパラメータ化だ.

このためにはそれぞれの右剰余類から群の代表元を 1 個選ぶだけでよい. 前節の $SO(4)$ 対称性が $SO(3)$ に破れる場合には, これらの代表元は 3 元ベクトル $\vec{\zeta}$ でパラメータ化される回転 R にとるのが便

利だった. また別の選び方もあり, これは任意のコンパクト群 G が任意の部分群 H に破れる場合に使える. まず G の生成子の記法を対称性の破れ方に合わせよう. H の独立な生成子の完全系を t_i と呼ぶことにする. (19.6.2) よりこれらは,

$$\sum_m (t_i)_{nm}\ \langle\psi_m\rangle_{\rm VAC} = 0 \tag{19.6.7}$$

を満たす. H は部分群なので, t_i は以下の部分代数を構成する.

$$[t_i, t_j] = i\ \sum_k C_{ijk} t_k\ . \tag{19.6.8}$$

G の残りの独立な生成子を x_a とする. これはどの基底でも完全反対称な構造定数を持つ. (そのような基底はコンパクト群については常に存在する. 15.2 節を見よ.) x_a は (19.6.8) の右辺に現れないので, 構造定数 C_{ija} は全てゼロだ. そしてそれらは完全反対称なので $C_{iaj} = 0$ となるので,

$$[t_i, x_a] = i \sum_b C_{iab} x_b \tag{19.6.9}$$

となる. しかし, x 同士の交換子が t の線形結合だというのは必ずしも正しくない. これは G と H の性質に依り, また H が G にどのように埋め込まれているかにも依る. (C_{abc} がゼロになる場合, 剰余空間 G/H は**対称空間** (symmetric space) と呼ばれる.) 一般には,

$$[x_a, x_b] = i \sum_i C_{abi} t_i + i \sum_c C_{abc} x_c \tag{19.6.10}$$

と書ける. (19.6.8)–(19.6.10) の形の交換関係を持つ生成子の組はリー代数の**カルタン分解** (Cartan decomposition) と呼ばれる. 1 例としてカイラル $SU(2)\times SU(2)$ のリー代数 (19.4.9)–(19.4.11) が挙げられる. この場合はたまたま C_{abc} がゼロだった.

t_i と x_a は G のリー代数を張るので, G のどの有限な元も,

$$g = \exp\left[i \sum_a \xi_a x_a\right]\ \exp\left[i \sum_i \theta_i t_i\right] \tag{19.6.11}$$

の形に書ける. ここで ξ_a と θ_i は実数のパラメータの組だ. しかし (19.6.3) の変換 $\gamma(x)$ は今のところ H の元を右からかける分を除いて定義されているだけなので,

$$\gamma(x) = \exp\left[i\sum_a \xi_a(x)x_a\right] \qquad (19.6.12)$$

の形に取ることで γ の定義を標準化できる. $\xi_a(x)$ は (規格化を除いて) ゴールドストン・ボゾン場と同定できる.

以下では各右剰余類から選ばれた代表元は単に, あるパラメータ ξ_a の連続関数 $\gamma(\xi)$ として表されていると仮定する. (19.6.12) は一般的には一つの具体的な例を与えているが, このパラメータ化に限定しない.

さて, (19.6.3) を使ってラグランジアンのすべての場 $\psi(x)$ を $\gamma(x)\tilde{\psi}(x)$ で置き換えるとする. 場の微分は,

$$\partial_\mu\psi(x) = \gamma(x)\left[\partial_\mu\tilde{\psi}(x) + (\gamma^{-1}(x)\partial_\mu\gamma(x))\tilde{\psi}(x)\right] \qquad (19.6.13)$$

で与えられる. したがってラグランジアンを ψ ではなく $\tilde{\psi}$ で表すと, ゴールドストン・ボゾン場は $\gamma^{-1}(x)\partial_\mu\gamma(x)$ が $\xi_a(x)$ およびその微分に依存することによって現れる.

$\gamma(x)$ のような群の元の任意の変分は群の元と群の生成子の線形結合との積で書くことができる. 今の場合これは,

$$\gamma^{-1}(x)\partial_\mu\gamma(x) = i\sum_a x_a D_{a\mu}(x) + i\sum_i t_i E_{i\mu}(x) \qquad (19.6.14)$$

と書ける. ここで $D_{a\mu}$ と $E_{i\mu}$ は以下の形をとる.

$$D_{a\mu}(x) = \sum_b D_{ab}\Big(\xi(x)\Big)\partial_\mu\xi_b(x)\,, \qquad (19.6.15)$$

$$E_{i\mu}(x) = \sum_b E_{ib}\Big(\xi(x)\Big)\partial_\mu\xi_b(x)\,. \qquad (19.6.16)$$

したがってゴールドストン・ボゾン場はラグランジアンに $D_{a\mu}(x)$ と $E_{i\mu}(x)$ (およびそれらの微分) が現れることを通じて入ってくる. 厳密な対称性が破れた場合, ξ の全ての相互作用は少なくとも微分を 1 個含まなければならないので, 質量項 $m_{ab}^2\xi_a\xi_b$ はラグランジアンに現れることができず, またどれかのゴールドストン・ボゾンの 4 元運動量がゼロになると全ての相互作用はゼロになる.

基礎にあるラグランジアンの詳細を知らない場合でも, $D_{a\mu}$ と $E_{i\mu}$ の変換性から, それらが変換されたラグランジアンにどのように現れるかについて多くのことを知ることができる. 群 G の任意の元 g のもとで, 元の場 ψ は (19.6.1) に従って次のように変換する.

$$\psi(x) \to \psi'(x) = g\psi(x) = g\gamma\Big(\xi(x)\Big)\tilde{\psi}(x)\,. \tag{19.6.17}$$

ここで $g\gamma(\xi)$ は G の元なので, ある $\gamma(\xi')$ と同じ右剰余類に属し, したがって,

$$g\gamma\Big(\xi(x)\Big) = \gamma\Big(\xi'(x)\Big)h\Big(\xi(x), g\Big) \tag{19.6.18}$$

の形に書ける. ここで h は破れていない部分群 H のある元だ. これを (19.6.17) で使うと $\psi'(x)$ は以下のように (19.6.3) の形をしていることが分かる.

$$\psi'(x) = \gamma\Big(\xi'(x)\Big)\tilde{\psi}'(x)\,. \tag{19.6.19}$$

ここで, $\xi'(x)$ は (19.6.18) で定義されており,

$$\tilde{\psi}'(x) \equiv h\Big(\xi(x), g\Big)\tilde{\psi}(x) \tag{19.6.20}$$

を使った. 前節の最初の例で, $\tilde{\psi}$ は単一のアイソスカラー σ から成っており, これは破れていないアイソスピン部分群のもとで不変だったので, カイラル不変でもあった. より一般的には, $\tilde{\psi}(x)$ は一般の G 変換のもとで必ずしも不変ではなく, その G 変換性は破れていない部分群 H のもとでの変換にのみ依存することがわかる. このことは前

節で核子場を導入したときに見た. つまり, 一般の破れたカイラル対称性の微小な変換のもとで, 場 $\tilde{N}$ は場に依存するアイソスピン回転 (19.5.45) に従って変換した.

(19.6.18) と (19.6.20) の変換則 $\xi \to \xi'$ と $\tilde{\psi} \to \tilde{\psi}'$ は元の場 ψ_n の特別な線形 G 変換性とは関連がない. 実際, これらの変換則を導くのに線形 G 変換のもとで不変なラグランジアンから出発する必要はなかった. 群 G が線形または非線形に作用する任意の場の組と場のある特別な値 (それらの真空期待値) の組を不変にする部分群 H とがあれば, 常にこれらの場を (少なくともその特別な値の有限な近傍では) G のもとで (19.6.18) と (19.6.20) で定義される標準的な実現 $\xi_a \to \xi'_a$, $\tilde{\psi} \to \tilde{\psi}'$ に従って変換する ξ_a と $\tilde{\psi}_n$ の組で表すことができる. この実現が本質的に一意的なことは, 最初に $SU(2) \times SU(2)$ が $SU(2)$ に破れる場合について証明され,[25] その後一般のリー群が任意の部分群に破れる場合について証明された.[31] より簡単な議論のためには, 任意のコンパクトなリー群 G の非線形実現に従って変換する場のどのような組についても, G のもとで線形に変換するこれらの場 (および多分付加的な場*) の関数を定義できることに気付けばよい.[32] この線形実現から出発して, この節の議論に従えば, 変換則 (19.6.18) と (19.6.20) を持つ場 ξ と $\tilde{\psi}$ を作ることができる.

$\xi(x)$ と $\tilde{\psi}(x)$ の変換は一般の $g \in G$ については複雑だが, g 自体が破れていない部分群 H の元 h のときにははるかに簡単だ. ゴールドストン・ボゾン場 $\xi_a(x)$ は破れていない部分群 H のある線形表現 $\mathcal{D}_{ab}(h)$ に従って変換するように選ぶのが普通で, またそれは常に可能だ.

$$h\,\gamma(\xi)\,h^{-1} = \gamma\Big(\mathcal{D}(h)\xi\Big)\,. \tag{19.6.21}$$

例えば, 前節で使った剰余類の空間 $SO(4)/SO(3)$ のパラメータ化で,

---

*例えば, 極角 θ と方位角 φ は $SO(3)$ の非線形実現を与えるが, 余分な変数 r を付け加えると $SO(3)$ のもとで線形に変換する量 x_1, x_2, x_3 を作ることができる.

ゴールドストン・ボゾン場 ζ_a はアイソスピン 3 元ベクトルを構成していた．より一般に適用可能な (19.6.12) に基づくパラメータ化では，交換関係 (19.6.9) より x_a は H のもとで，

$$hx_b h^{-1} = \sum_a \mathcal{D}_{ba}(h) x_a \ , \tag{19.6.22}$$

のように線形に変換することが分かり，このことから (19.6.21) がただちに出てくる．(19.6.21) を (19.6.18) と比較して，$g = h \in H$ の場合には，

$$\xi'_a(x) = \sum_b \mathcal{D}_{ab}(h) \xi_b(x) \ , \tag{19.6.23}$$

$$\tilde{\psi}'_n(x) = \sum_m h_{nm} \tilde{\psi}_m(x) \tag{19.6.24}$$

となることが分かる．言い換えれば，ξ_a と $\tilde{\psi}_n$ は H のもとでそれぞれ表現 $\mathcal{D}_{ab}(h)$ と h_{nm} 自身に従って変換する．

次に，変換 (19.6.18) と (19.6.20) のもとで不変な最も一般的なラグランジアンを構成する方法を考えねばならない．一般の $g \in G$ についての $\xi \to \xi'$ の変換は非線形でかなり複雑だ．また $\xi_a(x)$ が $D_{a\mu}(x)$ や $E_{i\mu}(x)$ のような量以外の形でラグランジアンに現れることは排除される．さいわい，これらの量は非常に簡単な変換則に従う．(19.6.18) を x^μ で微分して同式の逆を左からかける．すると，

$$\begin{aligned}
\gamma^{-1}\Big(\xi(x)\Big)\partial_\mu \gamma\Big(\xi(x)\Big) &= \Big[g\gamma\Big(\xi(x)\Big)\Big]^{-1} \partial_\mu \Big[g\gamma\Big(\xi(x)\Big)\Big] \\
&= h^{-1}\Big(\xi(x), g\Big)\gamma^{-1}\Big(\xi'(x)\Big)\partial_\mu \Big[\gamma\Big(\xi'(x)\Big)h\Big(\xi(x), g\Big)\Big] \\
&= h^{-1}\Big(\xi(x), g\Big)\Big[\gamma^{-1}\Big(\xi'(x)\Big)\partial_\mu \gamma\Big(\xi'(x)\Big)\Big]\ h\Big(\xi(x), g\Big) \\
&\quad + h^{-1}\Big(\xi(x), g\Big)\partial_\mu h\Big(\xi(x), g\Big)
\end{aligned}$$

が得られ，よって，

$$\gamma^{-1}\Big(\xi'(x)\Big)\partial_\mu \gamma\Big(\xi'(x)\Big) = h\Big(\xi(x), g\Big)$$

$$\times \left[\gamma^{-1}\Big(\xi(x)\Big)\partial_\mu\gamma\Big(\xi(x)\Big)\right] h^{-1}\Big(\xi(x),g\Big)$$
$$- \left[\partial_\mu h\Big(\xi(x),g\Big)\right] h^{-1}\Big(\xi(x),g\Big) \tag{19.6.25}$$

となる. (19.6.14) より $\gamma^{-1}\partial_\mu\gamma$ は x と t の線形結合で与えられる. また, (19.6.25) の右辺第 2 項は t だけの整形結合だ. x_a と t_i は全て独立なので, (19.6.25) の両辺の各生成子の係数は全て等しく, 以下を得る.

$$\sum_a x_a D'_{a\mu} = h(\xi,g)\left(\sum_a x_a D_{a\mu}\right) h^{-1}(\xi,g)\ , \tag{19.6.26}$$

$$\sum_i t_i E'_{i\mu} = h(\xi,g)\left(\sum_i t_i E_{i\mu}\right) h^{-1}(\xi,g)$$
$$+ i\left[\partial_\mu h(\xi,g)\right] h^{-1}(\xi,g)\ , \tag{19.6.27}$$

あるいはより詳細に,

$$D'_{a\mu}(x) = \sum_b \mathcal{D}_{ab}\left(h\Big(\xi(x),g\Big)\right)\ D_{b\mu}(x)\ ,$$
$$E'_{i\mu}(x) = \sum_j \mathcal{E}_{ij}\left(h\Big(\xi(x),g\Big)\right) E_{j\mu}(x)$$
$$-\sum_b \mathcal{H}_{ib}\left(h\Big(\xi(x),g\Big)\right)\partial_\mu\xi_b(x)\ . \tag{19.6.28}$$

ここで $D_{a\mu}$ と $E_{i\mu}$ は (19.6.15) と (19.6.16) で定義されており, また,

$$\left[\partial_\mu h\Big(\xi(x),g\Big)\right] h^{-1}\Big(\xi(x),g\Big) = i\sum_{ib}\mathcal{H}_{ib}\Big(\xi(x)\Big)t_i\partial_\mu\xi_b(x)\ ,$$

$$h\,t_j\,h^{-1} = \sum_i \mathcal{E}_{ij}(h)t_i$$

で, 一方 $\mathcal{D}_{ab}$ は (19.6.22) で定義されている. $D_{a\mu}(x)$ という量はゴールドストン・ボゾン場の「共変微分」で, 一般の元 $g\in G$ のもとで場 $\tilde{\psi}$ によく似た変換をする. すなわち両者は, 表現は異なるが, H の変

換 $h(\xi(x),g)$ を受ける. 例えば, 前節の $SO(4)$ 理論ではパイ中間子場 $\vec{\zeta}$ の共変微分は $\partial_\mu\vec{\zeta}/(1+\vec{\zeta}^2)$ という量だった. この量は微小カイラル変換のもとでアイソスピン回転 (19.5.15) に従って変換する.

他方 $E_{j\mu}(x)$ はゲージ場によく似た非斉次の変換をする. (19.6.28) の余分な項のおかげで $\tilde{\psi}$ の微分の非斉次項を打ち消すことができる. (19.6.20) を微分すると,

$$\partial_\mu\tilde{\psi}'(x) = h\Big(\xi(x),g\Big)\Big[\partial_\mu\tilde{\psi}(x) + h^{-1}\Big(\xi(x),g\Big)\partial_\mu h\Big(\xi(x),g\Big)\tilde{\psi}(x)\Big]$$

を得る. これと (19.6.27) を合わせて,

$$\Big(\mathcal{D}_\mu\tilde{\psi}(x)\Big)' = h\Big(\xi(x),g\Big)\mathcal{D}_\mu\tilde{\psi}(x) \qquad (19.6.29)$$

となる. ここで $\mathcal{D}_\mu\tilde{\psi}$ は以下の重い粒子場の共変微分だ.

$$\mathcal{D}_\mu\tilde{\psi}(x) \equiv \partial_\mu\tilde{\psi}(x) + i\sum_i t_i E_{i\mu}(x)\tilde{\psi}(x)\ . \qquad (19.6.30)$$

((19.5.47) は $SO(4)$ が $SO(3)$ に破れる場合のそのような共変微分の例になっている.) したがって, 破れていない部分群 H のもとで不変で $\tilde{\psi}$, $\mathcal{D}_\mu\tilde{\psi}$, $D_{a\mu}$ から構成される任意のラグランジアンは全体の群 G のもとでもまた不変だ.

くりこみ可能性はここで問題ではないので, 2 回以上の時空微分を含む量も考えることができる. そのような量の一つは $\mathcal{D}_\nu\mathcal{D}_\mu\tilde{\psi}$ で, これは次のように演算 (19.6.30) を単に繰り返して得られる.

$$\mathcal{D}_\nu\mathcal{D}_\mu\tilde{\psi} = \left[\partial_\nu + i\sum_j t_j E_{j\nu}\right]\left[\partial_\mu + i\sum_i t_i E_{i\mu}\right]\tilde{\psi}\ . \qquad (19.6.31)$$

これはちょうど $\mathcal{D}_\mu\tilde{\psi}$ と同様に,

$$(\mathcal{D}_\nu\mathcal{D}_\mu\tilde{\psi})' = h(\xi,g)\mathcal{D}_\nu\mathcal{D}_\mu\tilde{\psi} \qquad (19.6.32)$$

と変換する. 別の共変量が共変なゴールドストン・ボゾン微分 (19.6.15) の共変微分から作ることができ, それはちょうど (19.6.30) と同様に定義されるが, t_i は x_a が持つ H の表現における対応する行列で置き換えたものだ.

$$\mathcal{D}_\nu D_{a\mu} = \partial_\nu D_{a\mu} + \sum_{ib} C_{iab}\, E_{i\nu} D_{b\mu}\ . \qquad (19.6.33)$$

これはちょうど $D_{a\mu}$ のように変換する.

$$(\mathcal{D}_\nu D_{a\mu})' = \sum_b \mathcal{D}_{ab}(h,g)\mathcal{D}_\nu D_{b\mu}\ . \qquad (19.6.34)$$

また, $E_{i\mu}$ の微分の反対称化によって (19.6.27) の非斉次項を取り除くことができる. これから「曲率」,

$$R_{i\mu\nu} \equiv \partial_\nu E_{i\mu} - \partial_\mu E_{i\nu} - i \sum_{j,k} C_{ijk} E_{j\mu} E_{k\nu} \qquad (19.6.35)$$

が得られる. これは実際には新しいものではない. 「物質場」 $\tilde{\psi}$ の反対称共変微分が次のようにこの曲率に比例することは容易に分かる.

$$[\mathcal{D}_\nu, \mathcal{D}_\mu]\tilde{\psi} = \sum_i t_i\, R_{i\mu\nu}\tilde{\psi}\ . \qquad (19.6.36)$$

もちろんこのやり方を続けて $\mathcal{D}_\mu\tilde{\psi}$ と $D_{a\mu}$ のどんどん高次の微分をとっていけばさらに多くの共変微分が構成できる.

次のことに留意するのは有用だ. つまり, $D_{a\mu}$ と $E_{i\mu}$ は群 G と H および剰余類空間 G/H のパラメータ化が与えられると, 一度に全て計算でき, それらは, 場 ψ_n の仮定した変換性や破れた対称性の群のリー代数を表現するために使った特定の行列 x_a, t_i には依らない. 例えば, 指数関数によるパラメータ化 (19.6.12) では, これらの共変量の冪級数の最初の数項は (19.6.12) と (19.6.14) から次のようにして容易に計算できる.

$$D_{a\mu} = \partial_\mu \xi_a + \tfrac{1}{2} \sum_{bc} C_{abc}\xi_b \partial_\mu \xi_c\ ,$$

$$+\tfrac{1}{6}\sum_{bcd}\left[\sum_{e}C_{cde}C_{bea}+\sum_{i}C_{cdi}C_{bia}\right]\xi_b\xi_c\partial_\mu\xi_d$$
$$+\,O(\xi^3\partial_\mu\xi)\,, \tag{19.6.37}$$
$$E_{i\mu}=\tfrac{1}{2}\sum_{ab}C_{abi}\xi_a\partial_\mu\xi_b+\tfrac{1}{6}\sum_{abcd}C_{acd}\,C_{bdi}\,\xi_a\xi_b\partial_\mu\xi_c$$
$$+\,O(\xi^3\partial_\mu\xi)\,. \tag{19.6.38}$$

ゴールドストン・ボゾン場 ξ_a と重い粒子の場を含む最も一般的なラグランジアンを構成するために知っておく必要があるのは, G から H への自発的対称性の破れのパターンと重い粒子の場の (G ではなく) H のもとでの変換性だけだ. つまり, ラグランジアンは $\tilde{\psi}$, $\mathcal{D}_\mu\tilde{\psi}$, $D_{a\mu}$ および高次共変微分の最も一般的で H 不変な関数にとる.

次に G のもとでの対称性が自発的に破れているだけでなく, 最初から厳密でさえない場合を考察する. 最初のラグランジアンが項 $\Delta\mathcal{L}$ を含み, この項は線形変換 $\psi\to g\psi$ の群 G のもとで不変ではなく, G のある (可約または既約な) 表現の成分の線形結合として変換するとする. すなわち,

$$\Delta\mathcal{L}=\sum_A c_A\mathcal{O}_A \tag{19.6.39}$$

ととる. ここで $\mathcal{O}_A$ は G のもとである表現 $D[g]_{AB}$ に従って以下のように変換するとする.

$$\mathcal{O}_A\to\sum_B D[g]_{AB}\mathcal{O}_B\,. \tag{19.6.40}$$

ここで場 ψ を $\xi_a,\tilde{\psi}$ の組で置き換えると, ラグランジアンのこの項は依然 (19.6.39) の形をとるが, (19.6.40) は今度は,

$$\mathcal{O}_A\left[f_a(\xi,g),\ h(\xi,g)\tilde{\psi}\right]=\sum_B D[g]_{AB}\mathcal{O}_B\left[\xi,\tilde{\psi}\right] \tag{19.6.41}$$

となる. ここで $f_a(\xi,g)$ は変換 g を ξ_a に施した結果で, 次のように

(19.6.18) で定義されている.

$$g\gamma\Big(\xi\Big) = \gamma\Big(f(\xi,g)\Big)h\Big(\xi,g\Big)\ . \tag{19.6.42}$$

以下で見るように, (19.6.41) を満たす演算子の組を見つけるのは容易で, その解は $\tilde{\psi}$ のある H 不変な関数の指定を除いて一意的だ.

最初に $\xi_a = 0$ で $g = \gamma(\xi')$ の場合を考える. この場合 $g\gamma(\xi) = \gamma(\xi')$ なので,

$$f_a\Big(0,\gamma(\xi')\Big) = \xi'_a\ , \qquad h\Big(0,\gamma(\xi')\Big) = 1$$

となる. (19.6.41) でこれを代入すると (プライムを落として),

$$\mathcal{O}_A\Big[\xi_a,\tilde{\psi}\Big] = \sum_B D[\gamma(\xi)]_{AB}\,\mathcal{O}_B\Big[0,\tilde{\psi}\Big] \tag{19.6.43}$$

となる. これより演算子 $\mathcal{O}_A[\xi_a,\tilde{\psi}]$ が $\xi_a = 0$ で分かっていれば, 全ての ξ_a について与えられる.

次に $\xi_a = 0$ で, g は破れていない部分群 H の元 h ととる. すると $g\gamma(\xi) = h$ なので,

$$f_a(0,h) = 0\ , \qquad h(0,h) = h$$

となる. これを (19.6.41) に代入すると今度は,

$$\mathcal{O}_A\Big[0,h\tilde{\psi}\Big] = \sum_B D[h]_{AB}\,\mathcal{O}_B\Big[0,\tilde{\psi}\Big] \tag{19.6.44}$$

となる. 言い換えれば, $\xi = 0$ のときの $\mathcal{O}_A$ は線形 H 変換のもとで G の表現 (19.6.40) に見られるのと同じ変換性を持たなければならない. (しかし, これによって G の表現 (19.6.40) に見られる H の異なる既約表現の規格化が決まるわけではない. それらのあるものはまったく存在しなくてもよい.)

最後に, (19.6.44) を満たす任意の $\mathcal{O}$ の組があれば, (19.6.43) を使って一般の G 変換則 (19.6.40) を満たす演算子を作ることが可能だと

いうことを述べておく. (19.6.43) と (19.6.44) を使うと (19.6.41) の左辺は,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}_A\left[f_a(\xi,g),\ h(\xi,g)\tilde{\psi}\right] &= \sum_B D[\gamma\Big(f(\xi,g)\Big)]_{AB}\mathcal{O}_B\left[0, h(\xi,g)\tilde{\psi}\right] \\
&= \sum_{BC} D[\gamma\Big(f(\xi,g)\Big)]_{AB} D[h(\xi,g)]_{BC}\ \mathcal{O}_C\left[0,\tilde{\psi}\right] \\
&= \sum_B D[\gamma\Big(f(\xi,g)\Big)h(\xi,g)]_{AB}\ \mathcal{O}_B\left[0,\tilde{\psi}\right] \\
&= \sum_B D[g\gamma(\xi)]_{AB}\ \mathcal{O}_B\left[0,\tilde{\psi}\right] \\
&= \sum_B D[g]_{AB}\ \mathcal{O}_B\left[\xi,\tilde{\psi}\right]
\end{aligned}
$$

となり, これは示したかったことだ.

例として, 前節のように群 $SO(4)$ が $SO(3)$ に自発的に破れる場合を考え, ゴールドストン・ボゾン場 $\vec{\zeta}(x)$ とそれ以外の場 $\tilde{\psi}(x)$ から $SO(4)$ の 4 元ベクトル表現に従って変換する演算子を構成したいとする. (19.6.43) に従い, これは,

$$
\mathcal{O}_n\left[\vec{\zeta},\tilde{\psi}\right] = R_{nm}(\vec{\zeta})\,\mathcal{O}_m\left[0,\tilde{\psi}\right]
$$

の形をとらなければならない. ここで R は (19.5.8) と (19.5.9) で定義される以下の $SO(4)$ 回転だ.

$$
R_{a4} = \frac{2\zeta_a}{1+\vec{\zeta}^2}\,, \qquad R_{44} = \frac{1-\vec{\zeta}^2}{1+\vec{\zeta}^2}\,.
$$

R が直交行列だという条件は, 他の成分を,

$$
R_{ab} = \delta_{ab} - \frac{2\zeta_a\zeta_b}{1+\vec{\zeta}^2}\,, \qquad R_{4a} = -\frac{2\zeta_a}{1+\vec{\zeta}^2}
$$

と選べば満たされる. したがってカイラル 4 元ベクトルの第 4 成分および第 3 成分として変換するどのようなスカラー演算子も (擬スカ

ラーとは異なり) 有効ラグランジアンの中で,

$$\Phi_4^+\left[\vec{\zeta},\tilde{\psi}\right] = -\left(\frac{2\vec{\zeta}}{1+\vec{\zeta}^2}\right)\cdot\vec{\Phi}^+\left[0,\tilde{\psi}\right] + \left(\frac{1-\vec{\zeta}^2}{1+\vec{\zeta}^2}\right)\Phi_4^+\left[0,\tilde{\psi}\right]$$

および

$$\Phi_3^-\left[\vec{\zeta},\tilde{\psi}\right] = \left[\Phi_3^-\left[0,\tilde{\psi}\right] - \left(\frac{2\zeta_3}{1+\vec{\zeta}^2}\right)\vec{\zeta}\cdot\vec{\Phi}^-\left[0,\tilde{\psi}\right]\right] + \left(\frac{2\zeta_3}{1+\vec{\zeta}^2}\right)\Phi_4^-\left[0,\tilde{\psi}\right]$$

の形で現れなければならない. 演算子 $\vec{\Phi}^+[0,\tilde{\psi}]$, $\Phi_4^+[0,\tilde{\psi}]$, $\vec{\Phi}^-[0,\tilde{\psi}]$, $\Phi_4^-[0,\tilde{\psi}]$ が満たさねばならない条件は, ローレンツ変換とアイソスピン変換のもとでそれぞれ擬スカラー・アイソベクトル, スカラー・アイソスカラー, スカラー・アイソベクトル, 擬スカラー・アイソスカラーとして変換すべきだということだけで, 相互にどのような関係も持つ必要がない. パイ中間子のみを含む過程ではパイ中間子場 $\vec{\zeta}$ 以外の場を含まない有効ラグランジアンを使うので, 演算子 $\vec{\Phi}^+[0,\tilde{\psi}]$, $\vec{\Phi}^-[0,\tilde{\psi}]$, $\Phi_4^-[0,\tilde{\psi}]$ は全てゼロでなければならず, 他方 $\Phi_4^+[0,\tilde{\psi}]$ は単に定数値だ. 前節で予告したとおり, 有効ラグランジアンの中で微分を含まずカイラル対称性を破る演算子は唯一 $(1-\vec{\zeta}^2)/(1+\vec{\zeta}^2)$ に比例し, したがって演算子 (19.5.34) に比例するものだ. 核子場について双一次で対称性を破る演算子を含めるためには, パリティとアイソスピンの保存から以下のようにとる必要がある.

$$\vec{\Phi}^+\left[0,\tilde{N}\right] \propto \bar{\tilde{N}}\gamma_5\vec{t}\tilde{N}\,, \qquad \Phi_4^+\left[0,\tilde{N}\right] \propto \bar{\tilde{N}}\tilde{N}\,,$$

$$\vec{\Phi}^-\left[0,\tilde{N}\right] \propto \bar{\tilde{N}}\vec{t}\tilde{N}\,, \qquad \Phi_4^-\left[0,\tilde{N}\right] \propto \bar{\tilde{N}}\gamma_5\tilde{N}\,.$$

したがって, 前節で述べたとおり核子の双一次式を含み微分を含まない対称性を破る項は (19.5.61)–(19.5.64) の形をしたものだけだ.

現象論的なラグランジアンを使って, 小さな 3 元運動量を持つ粒子を含む過程の振幅を, 前節でパイ中間子と核子のカイラルな理論につ

いて計算したのとほとんど同じやり方で計算できる．特徴的な小さな運動量 Q の冪を数える際に，ゴールドストン・ボゾンの内線からは常に次数 Q^{-2} の因子の寄与がある．また，場 $\tilde{\psi}$ で記述される (任意のスピンの) 重い粒子がゴールドストン・ボゾン場から全体として 4 元運動量 q を吸収するとき，その重い粒子の内線はプロパゲータ，

$$\frac{N(p+q)}{(p+q)^2+M^2} \to \frac{N(p)}{2p\cdot q}$$

を持つ．(ここで N はその粒子のスピンと場の種類に依るある多項式で，M はその粒子の質量だ.) したがって，それからは次数 Q^{-1} の因子の寄与がある．(19.5.55) を導いたのと同じ議論がここでも成り立ち，与えられたファインマン・ダイアグラムの Q についての次数が，

$$\nu = \sum_i V_i\,(d_i + h_i/2 - 2) + 2L - \frac{E_h}{2} + 2 \tag{19.6.45}$$

と与えられる．ここで V_i は種類 i の頂点の数，d_i は種類 i の頂点での微分 (または近似的な破れた対称性の場合には微分とゴールドストン・ボゾンの質量) の数，h_i は種類 i の頂点での重い粒子の線の数，L はループの数，E_h は重い粒子の外線の数だ．一般に係数 $d_i + h_i/2 - 2$ はカイラル対称性から許される全ての相互作用について正かゼロだ．ゴールドストン・ボゾン間の相互作用では常に $d_i \geq 2$ だ．なぜならそれは共変微分 (19.6.15) について少なくとも 2 次か，あるいはゴールドストン・ボゾンの質量の 2 乗の次数を持つ (前節でのクォークの質量のような) 対称性の破れのパラメータに比例しなければならないからだ．ゴールドストン・ボゾンと重い粒子との間の相互作用は共変微分 (19.6.15) または (19.6.30) を含まねばならず，$d_i \geq 1$ および $h_i \geq 2$ を持たねばならない．$d_i + h_i/2 < 2$ を満たす唯一の相互作用は重い粒子間の 3 次の相互作用ということになるが，全ての重いハドロンが非相対論的なダイアグラムのみを考えているのでこれは排除される．全ての相互作用について $d_i + h_i/2 \geq 2$ なら，主要なダイアグラムは

$d_i + h_i/2 = 2$ を満たす相互作用のみから成るループを含まないダイアグラムだ. 補正項はこの場合もより多くの微分やより多くの重い粒子場や 1 個以上のループを含む相互作用から来る.

対称性を最初から破る項がなければ, ゴールドストン・ボゾン場のみを含むラグランジアンの部分の $d_i = 2$ の項は,

$$\mathcal{L}_{GB} = -\frac{1}{2}\sum_{ab} F_{ab}^2 D_{a\mu} D_b^\mu \tag{19.6.46}$$

だけだ. ここで F_{ab}^2 はある実の正定値行列だ. (19.6.12) および剰余類のその他の広い種類のパラメータ化において, $\gamma(\xi)$ は $\xi_a \to 0$ で $1 + i\xi_a x_a$ に近づくので, (19.6.14) より $D_{a\mu}$ の 1 次の項は単に $\partial_\mu \xi_a$ だ. ラグランジアンの運動項が $-\frac{1}{2}\sum_a \partial_\mu \pi_a \partial^\mu \pi_a$ となるように正準規格化されたゴールドストン・ボゾン場 π_a は, したがって,

$$\pi_a = \sum_b F_{ab} \xi_b \tag{19.6.47}$$

となる. 前節の $SO(4)$ 理論では, 生成子 x_a と場 ξ_a は破れていない部分群 $H = SO(3)$ の既約表現に従って変換するので, この場合は $F_{ab}^2 = F_\pi^2 \delta_{ab}$ で, F_π は自発的対称性の破れのエネルギー・スケールを特徴付けるただ一つの定数だ. 一般の場合には F_{ab}^2 が対角的で, 対角要素は H の各既約表現内では全て等しく, それ以外は独立となるように (構造定数を変えずに) 生成子を選ぶことができる.

* * *

19.5 節で出発点にとった $SU(2) \times SU(2)$ の 4 元ベクトル $\phi_n(x)$ のように, 破れた対称性の群の線形表現に属する場から出発してゴールドストン・ボゾン場の理論を作る方法を見てきた. 極めて低エネルギーで重要な唯一の自由度はゴールドストン・ボゾンなので, (19.5.4) で与えられる $\sigma(x)$ のような場の非ゴールドストン・ボゾン部分は一般に捨ててしまう. しかし破れた対称性の群の線形表現全体に戻るこ

とが必要でゴールドストン・ボゾン場は単にその 1 部分でしかないという状況も存在する.

これは, 温度を変えたりある種の外場をかけることによって, 系が 2 次相転移に近づくときに起こる. その場合, 系は対称性が破れた状態から破れていない状態に滑らかに移行する. この相転移の一方の側では対称性は破れており, 質量ゼロのゴールドストン・ボゾンと質量がゼロでないその他の様々な励起が存在する. それらは一般に, 破れた対称性の群の線形表現である完全な多重項にはなっていない. 相転移のもう一方の側では対称性は破れておらず, ここでは完全な線形多重項が存在し, それは一般にゼロでない質量を持つ. この相転移が連続的なら, 転移のごく近傍ではゴールドストン・ボゾンは質量がほとんどゼロの励起を持つ完全な線形多重項の一部になっていなければならない. 何らかの偶然や別の対称性がなければ, この多重項は破れた対称性の群の既約表現を成す. 場のこの既約表現は, 相転移点の直上でのみ質量ゼロとなり, **秩序パラメータ** (order parameter) と呼ばれる.

これは通常の秩序パラメータの定義より精確だ. 期待値が対称性を破る場の組を全て秩序パラメータと呼ぶことがしばしばあるが, これは漠然としすぎている. その期待値が対称性の破れの原因となるような場の組は一つに限定することができない. 例えば, 質量ゼロの u クォークと d クォークを含む量子色力学の $SU(2) \times SU(2)$ 対称性はカイラル 4 元ベクトルの第 4 成分である $\bar{u}u + \bar{d}d$ の期待値によって破れているが, クォーク場の 4 次以上の冪もまたゼロでない真空期待値を持ち, これらは $SU(2) \times SU(2)$ の別の表現に属する. 対照的に, $SU(2) \times SU(2)$ が回復する滑らかな相転移ではゴールドストン・ボゾンは $SU(2) \times SU(2)$ のただ一つの質量ゼロ表現に属するようになり, これは秩序パラメータのあいまいさのない定義を与える.

18.5 節で述べた臨界指数を計算するためにも, また 21.6 節と 23.3 節で見るように破れた対称性が回復する特異点が存在する渦線や磁

気単極子のような配位を取り扱うためにも, 正しい秩序パラメータを同定することは重要だ. 量子色力学のカイラル $SU(2) \times SU(2)$ 対称性の秩序パラメータはカイラル 4 元ベクトルだとしばしば仮定されるが, これが正しいことは示されていない.[32a]

19.7 有効場の理論: $SU(\mathbf{3}) \times SU(\mathbf{3})$

原子核物理学の近似的な $SU(2)$ アイソスピン対称性は 1960 年代初期にゲルマン[33]とネーマン (Ne'eman)[34]によってより不正確な $SU(3)$ 対称性に拡張された. この対称性により既知のバリオンと中間子は, $p, n, \Lambda^0, \Sigma^{\pm,0}, \Xi^{-,0}$ の $1/2^+$ バリオン 8 重項, $K^{+,0}, \pi^{\pm,0}, \eta^0, \overline{K}^{-,0}$ の 0^- 中間子 8 重項, $K^{*+,0}, \rho^{\pm,0}, \omega, \overline{K^*}^{-,0}$ の 1^- 中間子 8 重項, $\Delta^{++,+,0,-}, \Sigma^{*+,0,-}, \Xi^{*0,-}, \Omega^-$ の $3/2^+$ バリオン 10 重項 というように種々の既約表現に分類された. (η と Ω は後になって発見された.) 1960 年代中頃にカイラル $SU(2) \times SU(2)$ 対称性が成功した後, 強い相互作用では近似的な $SU(3) \times SU(3)$ 対称性も成り立っていて, $SU(2) \times SU(2)$ と同様にその対角的な部分群であるゲルマンとネーマンの $SU(3)$ に自発的に破れていると考えるのが自然となった. そして量子色力学の出現以降, この対称性は, 2 個ではなく 3 個のかなり軽いクォーク, つまり u, d および d のように電荷 $-1/3$ を持つ 3 番目のクォーク s が存在するために生じていることが明らかになった. この場合, $SU(3) \times SU(3)$ 対称性は u, d, s クォーク場の左手成分と右手成分に作用する ((19.4.2) と類似の) 独立な以下の $SU(3)$ 変換から成る.

$$\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \to \exp\left[i \sum_a (\theta_a^V \lambda_a + \theta_a^A \lambda_a \gamma_5)\right] \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} . \tag{19.7.1}$$

ここで λ_a はトレース・ゼロのエルミートな行列の完全系,

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{19.7.2}$$

で $\mathrm{Tr}\,(\lambda_a\lambda_b) = 2\delta_{ab}$ と規格化されている. したがって $SU(3) \times SU(3)$ の生成子はクォーク場に働く破れていない $SU(3)$ 対称性の生成子 $t_a = \lambda_a$ と破れた対称性の生成子 $x_a = \lambda_a\gamma_5$ で表現される.

ゴールドストン・ボゾン場を定義しその変換性を導出するには, クォーク場が持つ表現で任意の $SU(3) \times SU(3)$ 変換は $\exp(-i\gamma_5 \sum_a \xi_a\lambda_a)$ と破れていない $SU(3)$ 部分群に属する変換 $\exp(i\sum_a \theta_a\lambda_a)$ との積で書くことができることに留意する. (ξ の負符号は後でこの場の成分を 19.5. 節で導入したパイ中間子場と比較する際に便利なように付けてある.) したがってこの表現では, $SU(3) \times SU(3)/SU(3)$ の各右剰余類はそれに含まれる $\gamma(\xi) = \exp(-i\gamma_5 \sum_a \xi_a\lambda_a)$ の形の行列で表され, これらの右剰余類のパラメータ ξ_a は規格化を除いてゴールドストン・ボゾン場ととることができる. (19.6.18) に従って, これらの場の変換則は,

$$\exp\left[i\sum_a(\theta_a^V\lambda_a + \theta_a^A\lambda_a\gamma_5)\right]\exp\left(-i\gamma_5\sum_a \xi_a(x)\lambda_a\right)$$

$$= \exp\left(-i\gamma_5 \sum_a \xi'_a(x)\lambda_a\right) \exp\left(i \sum_a \theta_a(x)\lambda_a\right) \tag{19.7.3}$$

で指定される. ここで $\theta_a(x)$ は θ^V, θ^A, $\xi(x)$ のある関数だ. また (19.6.3) に従って, ゴールドストン・ボゾンを含まないクォーク場 $\tilde{q}(x)$ はここでは,

$$q(x) \equiv \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \\ s(x) \end{pmatrix} = \exp\left(-i\gamma_5 \sum_a \xi_a(x)\lambda_a\right) \tilde{q}(x) \tag{19.7.4}$$

で定義され, (19.6.24) で与えられる以下の変換則を持つ.

$$\tilde{q}'(x) = \exp\left(i \sum_a \theta_a(x)\lambda_a\right) \tilde{q}(x)\ . \tag{19.7.5}$$

さらに進んで共変微分 (19.6.15) と (19.6.30) を導入し, それらを使ってカイラル不変なラグランジアン密度を作ることができるが, カイラル対称性についてはもっと簡単な方法が使える.

(19.7.3) の $(1+\gamma_5)$ と $(1-\gamma_5)$ に比例する部分は,

$$\exp\left(i \sum_a \theta^L_a \lambda_a\right) \exp\left(-i \sum_a \xi_a(x)\lambda_a\right)$$
$$= \exp\left(-i \sum_a \xi'_a(x)\lambda_a\right) \exp\left(i \sum_a \theta_a(x)\lambda_a\right) \tag{19.7.6}$$

と

$$\exp\left(i \sum_a \theta^R_a \lambda_a\right) \exp\left(i \sum_a \xi_a(x)\lambda_a\right)$$
$$= \exp\left(i \sum_a \xi'_a(x)\lambda_a\right) \exp\left(i \sum_a \theta_a(x)\lambda_a\right) \tag{19.7.7}$$

だということに留意する．ここで以下の定義を使った．

$$\theta_a^L \equiv \theta_a^V + \theta_a^A\ , \qquad \theta_a^R \equiv \theta_a^V - \theta_a^A\ .$$

(19.7.7) に右から (19.7.6) の逆をかけて，単純な変換則，

$$U'(x) = \exp\left(i\sum_a \lambda_a \theta_a^R\right) U(x) \exp\left(-i\sum_a \lambda_a \theta_a^L\right) \tag{19.7.8}$$

を得る．ここで $U(x)$ は以下のユニタリーなユニモジュラ行列だ．

$$U(x) \equiv \exp\left(2i\sum_a \xi_a(x)\lambda_a\right)\ . \tag{19.7.9}$$

言い換えれば，$U(x)$ は $SU(3)\times SU(3)$ の $(\bar{\mathbf{3}},\mathbf{3})$ 表現に従って変換する．これは依然として $SU(3)\times SU(3)$ の非線形実現だ．なぜなら $U(x)$ には非線形な条件 $U^\dagger U = 1$ と $\mathrm{Det}\,U = 1$ が課されていて，その成分は独立ではないからだ．

ゴールドストン・ボゾンのラグランジアンの $SU(3)\times SU(3)$ 不変な項で時空微分について 2 次のものは，

$$\mathcal{L}_{2\,\mathrm{deriv}} = -\tfrac{1}{16}\, F^2\,\mathrm{Tr}\left\{\partial_\mu U\,\partial^\mu U^\dagger\right\} \tag{19.7.10}$$

だけだ．ここで F^2 は後で決める正定数だ．ξ_a は通常どおり規格化された擬スカラー中間子場で，

$$\begin{aligned}\sum_a \lambda_a \xi_a &= \frac{\sqrt{2}}{F}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta^0 & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta^0 & K^0 \\ \bar{K}^- & \bar{K}^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}\eta^0 \end{bmatrix} \\ &\equiv \frac{\sqrt{2}B}{F} \end{aligned}\tag{19.7.11}$$

と表すことができ，よって (19.7.10) の運動項は以下の通常の形になる．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{kin}} = &-\tfrac{1}{2}\,\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^0 - \partial_\mu\pi^+\partial^\mu\pi^- - \partial_\mu K^+\partial^\mu \bar{K}^- \\ &-\partial_\mu K^0\partial^\mu \bar{K}^0 - \tfrac{1}{2}\,\partial_\mu\eta^0\partial^\mu\eta^0\ .\end{aligned}$$

定数 F を決めるには, (19.7.4) を (19.5.42) と比較して, ξ が微小なとき, 成分 ξ_1, ξ_2, ξ_3 は 19.5 節で導入したゴールドストン・ボソン場 ζ_1, ζ_2, ζ_3 に等しいことに気付けばよい. すると, (19.7.11) を (19.5.17) および (19.5.32) と比較して, (19.7.10) で定義された定数 F は 19.4 節で導入した $F_\pi = 184$ MeV に等しいことが分かる.

量子色力学の $SU(3) \times SU(3)$ 対称性はクォークの質量項により破れている. この項は (19.7.4) で定義したクォーク場 $\tilde{q}(x)$ を使うと,

$$\mathcal{L}_{\rm mass} = -\bar{q}\, M_q\, q = -\bar{\tilde{q}}\, e^{-i\sqrt{2}\gamma_5 B/F_\pi}\, M_q\, e^{-i\sqrt{2}\gamma_5 B/F_\pi}\, \tilde{q} \qquad (19.7.12)$$

となる. ここで M_q は次のとおりだ.

$$M_q = \begin{bmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{bmatrix} . \qquad (19.7.13)$$

(19.7.12) はクォークの双一次式をその真空期待値で置き換えて得られる純粋にボソンだけの部分を含む. この真空期待値は破れていない $SU(3)$ とパリティの対称性から次のように与えられる.*

$$< \bar{\tilde{q}}_n \gamma_5 \tilde{q}_m >_0 = 0\, , \qquad < \bar{\tilde{q}}_n \tilde{q}_m >_0 = -v\delta_{nm}\, . \qquad (19.7.14)$$

するとラグランジアンの中でゴールドストン・ボソンの質量項は,

$$-\frac{v}{F_\pi^2}\,{\rm Tr}\,\{B, \{B, M_q\}\} = -\frac{v}{F_\pi^2}\Bigg[4m_u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta^0\right)^2$$
$$+4(m_u + m_d)\pi^+\pi^- + 4(m_u + m_s)K^+\bar{K}^-$$

---

*真空が満たすパリティ, 電荷, ストレンジネスの保存則とクォークの質量行列が満たすそれらの保存則が同じものだという事実は 19.3 節で述べた真空整列条件の結果だ. 同様に, クォーク場をクォークの質量が全て正となるように定義すると, $v > 0$ として (19.7.3) の負符号は, 本当の真空が $SU(3) \times SU(3)$ 変換で回転した真空状態について真空エネルギーの最小点であって最大点ではないという条件から要求される. 後で見るように, この負符号のおかげで擬ゴールドストン・ボソン 8 重項の質量は正になる.

$$
+4m_d\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0+\frac{1}{\sqrt{6}}\eta^0\right)^2
$$
$$
\left.+4(m_d+m_s)K^0\bar{K}^0+\frac{8}{3}m_s(\eta^0)^2\right] \quad (19.7.15)
$$

となる. これより, 以下の関係を読み取ることができる.[35]

$$
\begin{aligned}
m_{\pi^+}^2 &= m_{\pi^0}^2 = \frac{4v}{F_\pi^2}[m_u+m_d]\,,\\
m_{K^+}^2 &= \frac{4v}{F_\pi^2}[m_u+m_s]\,,\\
m_{K^0}^2 &= \frac{4v}{F_\pi^2}[m_d+m_s]\,,\\
m_{\eta^0}^2 &= \frac{4v}{F_\pi^2}\left[\frac{4m_s+m_d+m_u}{3}\right]\,.
\end{aligned} \quad (19.7.16)
$$

また π^0 と η^0 を混ぜる項,

$$
m_{\pi\eta}^2 = \frac{4v}{\sqrt{3}F_\pi^2}[m_u-m_d] \quad (19.7.17)
$$

も存在することが分かる.

同じ結果は演算子の方法でも得られる. ネーターの定理より生成子 T_a と X_a を作ることができ, それらは,

$$
[T_a,q]=-\lambda_a q\,,\qquad [X_a,q]=-\gamma_5\lambda_a q \quad (19.7.18)
$$

を満たす. ゴールドストン・ボゾン場は実基底で π_a と書くことができる. ただし, $\pi^\pm=(\pi_1\pm i\pi_2)/\sqrt{2}$, $\pi^0=\pi_3$, $K^\pm=(\pi_4\pm i\pi_5)/\sqrt{2}$, $K^0=(\pi_6+i\pi_7)/\sqrt{2}$, $\bar{K}^0=(\pi_6-i\pi_7)/\sqrt{2}, \eta^0=\pi_8$ だ. 自発的対称性の破れで生き残る $SU(3)$ 対称性から, これらのボゾンの F 行列は $F_{ab}=F_\pi\delta_{ab}$ の形をとることが分かる. $SU(3)\times SU(3)$ 対称性はまたハミルトニアンの質量項 $H_1=m_u\bar{u}u+m_d\bar{d}d+m_s\bar{s}s=\bar{q}M_q q$ により最初から破れている. ここで M_q はクォークの質量行列 (19.7.13) だ. 擬ゴールドストン・ボゾンの質量行列は (19.3.20) よりここでは,

$$
M_{ab}^2=-F_\pi^{-2}\langle\bar{q}\left\{\lambda_a,\{\lambda_b,M_q\}\right\}q\rangle_0 \quad (19.7.19)
$$

と与えられる. これはクォークの質量についてすでに 1 次なので, この次数では破れていない $SU(3)$ の関係 $\langle \bar{u}u \rangle_0 = \langle \bar{d}d \rangle_0 = \langle \bar{s}s \rangle_0 \equiv -v$ を使うことができ, 先程と同様に (19.7.16) と (19.7.17) の結果が得られる.

K 中間子 2 重項の質量 $m_{K^+} = 493.65$ MeV と $m_{K^0} = 497.7$ MeV は極めて近く, パイ中間子の質量に比べて相当大きいので, (19.7.16) より m_u と m_d は m_s に比べてかなり小さいことが分かる. K 中間子の質量差やパイ中間子の質量のように m_u と m_d に対して敏感な量を計算する際には別の小さな補正である電磁理論の効果を考慮しなければならない. 電磁カレントは $J^0 = ie\bar{q}\gamma^\mu Qq$ で, Q は 2/3, −1/3, −1/3 を対角要素とする対角行列だ. それと $SU(3) \times SU(3)$ 生成子との交換子は以下のとおりだ.

$$[T_a, J^\mu] = -ie\tfrac{1}{2}\bar{q}\gamma^\mu[Q, \lambda_a]q\ , \qquad [X_a, J^\mu] = -ie\tfrac{1}{2}\bar{q}\gamma^\mu\gamma_5[Q, \lambda_a]q\ .$$

J^μ は X_3, X_6, X_7, X_8 および T_3, T_6, T_7, T_8 と交換するので, ハミルトニアンの電磁部分はこれらを生成子とする $SU(2)\times SU(2)\times U(1)\times U(1)$ 部分群のもとで不変だ. したがってクォークの質量がゼロの極限で, 生成子 X_3, X_6, X_7, X_8 を持つ対称性の自発的破れにともなうゴールドストン・ボゾンである $\pi^0, K^0, \bar{K}^0, \eta^0$ の中性擬ゴールドストン・ボゾンが電磁的効果によって質量を持つことはない.[36] また, クォークの質量がゼロの極限で, T_6, T_7, $\sqrt{3}T_8 - T_3$ により生成される破れていない $SU(2)$ 対称性があり, そのもとで K^+ と π^+ は 2 重項として変換するので, クォークの質量がゼロのとき K^+ と π^+ の質量への電磁補正は等しい.[36] クォークの質量項と電磁補正は全て小さいので, これらの効果はクォークの有効ハミルトニアンへの加算的な補正として取り扱うのが合理的だ. すると電磁理論を考慮して, 質量公式 (19.7.16) は修正されて,[37]

$$m^2_{K^\pm} = 4v(m_u + m_s)/F^2_\pi + \Delta\ ,$$

$$
\begin{aligned}
m_{K^0}^2 &= m_{\bar{K}^0}^2 = 4v(m_d + m_s)/F_\pi^2 \,, \\
m_{\pi^\pm}^2 &= 4v(m_d + m_u)/F_\pi^2 + \Delta \,, \\
m_{\pi^0}^2 &= 4v(m_d + m_u)/F_\pi^2 \,, \\
m_\eta^2 &= 4v(m_u + m_d + 4m_s)/3F_\pi^2
\end{aligned}
\tag{19.7.20}
$$

としなければならない. ここで Δ は K^+ と π^+ に共通の質量の 2 乗への補正だ.

これらの公式は 5 個の擬ゴールドストン・ボゾンの質量に以下の一つの線形の関係式を課す.

$$
3m_\eta^2 + 2m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2 = 2m_{K^+}^2 + 2m_{K^0}^2 \,. \tag{19.7.21}
$$

これはゲルマン・大久保の関係式の一つだ.** K 中間子とパイ中間子の質量を実験からとると, この関係式から η の質量が 566 MeV と与えられ, 実験値 547 MeV と比較される. 両者の小さな違いは通常, η 状態がもっと重い 958 MeV の擬スカラー粒子 η' と混合していることによると考えられている.

質量公式 (19.7.20) から, クォークの質量の比をパイ中間子と K 中

**この関係は元々 T_a で生成されるゲルマン・ネーマンの近似的な $SU(3)$ 対称性に基づいて, アイソスピン多重項内の質量差を無視して導出された.[38] この導出からは, この関係式を擬スカラー中間子の質量そのものに適用すべきか, それともここでのようにその 2 乗に対して適用すべきか分からない. 実際にはこの関係式を擬スカラーの質量そのものに適用すると, η の質量が 613 MeV となって, あまりうまく行かない. ゲルマン・大久保の関係式が中間子の質量の 2 乗についてよく成り立ち, 1 乗についてはあまりよく成り立たないという事実は, これらの粒子が自発的に破れた近似的 $SU(3) \times SU(3)$ 対称性のゴールドストン・ボゾンだという解釈を支持する. ゲルマンと大久保はまた T_a によって生成される近似的 $SU(3)$ 対称性を使って他の粒子の質量間の関係を導いた. それには最も軽いバリオン 8 重項の質量間の (アイソスピンを破る効果を無視した) 関係 $2m_N + 2m_\Xi = 3m_\Lambda + m_\Sigma$ 等が含まれる. そのような多重項については, 平均質量は多重項内の質量差に比べてはるかに大きいので, 関係式を質量とその 2 乗のどちらに適用してもほとんど差がない.

間子の質量で表した式を導くことができる.[37]

$$\frac{m_d}{m_s}=\frac{m_{K^0}^2+m_{\pi^+}^2-m_{K^+}^2}{m_{K^0}^2+m_{K^+}^2-m_{\pi^+}^2},\quad \frac{m_u}{m_s}=\frac{2m_{\pi^0}^2-m_{K^0}^2-m_{\pi^+}^2+m_{K^+}^2}{m_{K^0}^2+m_{K^+}^2-m_{\pi^+}^2}. \tag{19.7.22}$$

質量の値 $m_{\pi^+}=139.57$ MeV, $m_{\pi^0}=134.974$ MeV, $m_{K^+}=493.65$ MeV, $m_{K^0}=497.7$ MeV から比 $m_d/m_s=0.050$ と $m_u/m_s=0.027$ が与えられる. したがって d クォークと u クォークの比は 1 よりも 2 に近い. (擬スカラー中間子の質量と様々な他の情報を用いた 1996 年時点での計算[38a] から $m_d/m_s=0.053\pm0.002$ と $m_u/m_s=0.029\pm0.003$ の値が得られている.)

このどれからも個々のクォーク質量の明確な値は得られない. 実際, これらのクォーク質量は, クォークの双一次式についてのくりこみ処法を定義するまでは, よく定義されない. しばしばこの処法として m_s が, ある $SU(3)$ 多重項の中でストレンジネス 1 単位分だけ異なるアイソスピン多重項間の質量差に等しくなるようにとられる. 例えば, 最も軽いベクトル中間子 8 重項は, $\bar{s}$ 反クォークと u または d クォークとの束縛状態と解釈される 892 MeV の K^* アイソスピン 2 重項; その反粒子で s と $\bar{u}$ または $\bar{d}$ とから成る 2 重項; $\bar{u}$ または $\bar{d}$ と u または d との束縛状態と解釈される $T=1$ で 770 MeV の ρ と $T=0$ で 783 MeV の ω から構成される. もし K^* の質量と ρ および ω の質量の平均との差を相対的に大きな s クォークの質量のせいだと考えるなら, クォークの双一次式を $m_s-\frac{1}{2}(m_u+m_d)=m_{K^*}-\frac{1}{2}(m_\rho+m_\omega)=120$ MeV となるようにくりこまなければならない. この結果 $m_s=125$ MeV が得られる. 上のクォークの質量比を使うと, これより $m_d=6.0$ MeV と $m_u=3.3$ MeV が導かれる. しかし, これらの質量の値の評価は (19.7.22) で与えられる質量比の値に比べてずっと信頼性に欠ける. m_s は 125 MeV ではなく 180 MeV と評価されることも多い.[38b]

質量項 (19.7.12) には中間子・中間子相互作用が含まれる. (19.7.14),

(19.7.11), (19.7.9) を使って, ラグランジアンのこの項のボソンだけから成る部分を,

$$\mathcal{L}_{\text{mass, bosonic}} = \tfrac{1}{2}\, v \operatorname{Tr}\left\{M_q(U^\dagger + U)\right\} \tag{19.7.23}$$

と書くことができる. この項の形は対称性の一般的な考察から演繹できたはずのもので, またそうすることにより, 許される M_q の高次項を見つけることが可能になる. 3×3 の外場 χ を考案して基礎にある量子色力学のラグランジアンの質量項 (19.7.12) を χ・クォーク結合の項,

$$\mathcal{L}_\chi = -\bar{q}\left[\tfrac{1}{2}\,(1+\gamma_5)\chi + \tfrac{1}{2}\,(1-\gamma_5)\chi^\dagger\right] q \tag{19.7.24}$$

で置き換えてみよう. これは $\chi = \chi^\dagger = M_q$ の置き換えをすれば (19.7.12) に等しくなる. この処法の重要な点は, χ に形式的な変換則,

$$\chi \to \exp\left(i\sum_a \lambda_a \theta_a^R\right)\,\chi\,\exp\left(-i\sum_a \lambda_a \theta_a^L\right) \tag{19.7.25}$$

を与えれば, ラグランジアン (19.7.24) が $SU(3)\times SU(3)$ のもとで形式的に不変になることだ. したがって, クォーク質量を含む許されるボソン項を導出するには, U と χ を含む $SU(3)\times SU(3)$ 不変な (微分と M_q についてある与えられた次数までで) 最も一般的なラグランジアンを書いて, パリティ変換,

$$U(\mathbf{x},t) \leftrightarrow U^\dagger(-\mathbf{x},t)\,, \qquad \chi \leftrightarrow \chi^\dagger \tag{19.7.26}$$

のもとでの不変性も要求し, それから,

$$\chi = \chi^\dagger = M_q \tag{19.7.27}$$

の置き換えをすればよい. 例えば, 相互作用 $\operatorname{Tr}(U^\dagger\chi + U\chi^\dagger)$ は $SU(3)\times SU(3)$ およびパリティのもとで不変で, χ に値 (19.7.27) を与えると (19.7.23) と同じ形になる.

この技法を使って, ガッサー (Gasser) とロイトワイラー (Leutwyler)[39] は擬スカラー 8 重項の, 運動量または中間子質量について 4 次 (クォークの質量は中間子の質量の 2 次と数えて) の完全な有効ラグランジアンを以下のように与えた.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_4 = & L_1 \operatorname{Tr}\left\{\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U\right\}^2 + L_2 \operatorname{Tr}\left\{\partial_\mu U \partial_\nu U^\dagger\right\} \operatorname{Tr}\left\{\partial^\mu U \partial^\nu U^\dagger\right\} \\ & + L_3 \operatorname{Tr}\left\{\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \partial_\nu U \partial^\nu U^\dagger\right\} \\ & + L_4 \operatorname{Tr}\left\{\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger\right\} \operatorname{Tr}\left\{M_q(U + U^\dagger)\right\} \\ & + L_5 \operatorname{Tr}\left\{\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger (M_q U + U^\dagger M_q)\right\} + L_6 \left[\operatorname{Tr}\left\{M_q(U + U^\dagger)\right\}\right]^2 \\ & + L_7 \left[\operatorname{Tr}\left\{(U^\dagger - U) M_q\right\}\right]^2 + L_8 \operatorname{Tr}\left\{((U M_q)^2 + (U^\dagger M_q)^2)\right\} .\end{aligned} \tag{19.7.28}$$

ここで $L_1, \ldots, L_8$ は実験と比較して決めるべき定数だ. 中間子の質量と運動量について 4 次までの完全な有効ラグランジアンは次のとおりだ.

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 . \tag{19.7.29}$$

ここで $\mathcal{L}_2$ は (19.7.10) と (19.7.23) の和だ.

$$\mathcal{L}_2 = -\tfrac{1}{16} F^2 \operatorname{Tr}\left\{\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger\right\} + \tfrac{1}{2} v \operatorname{Tr}\left\{M_q(U^\dagger + U)\right\} . \tag{19.7.30}$$

電弱相互作用を含めるには, 微分 ∂_μ を適切なゲージ共変微分 D_μ で置き換え, 幾つかの項を $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ に加えればよい.

19.5 節および 19.6 節と同じ冪を数える議論に従えば, 中間子の質量と運動量について 4 次までの S 行列要素を計算するには, $\mathcal{L}_2$ については全ての次数で $\mathcal{L}_4$ については 1 次までの樹木ダイアグラムと, $\mathcal{L}_2$ だけから構成される 1 ループ・ダイアグラムの両方を含めなければならない. ガッサー, ロイトワイラーおよびその他の人達はこの有効ラグランジアンを使って中間子の力学 (および関連する電弱相互作用) の包括的な研究を行った.[40]

* * *

クォークの質量項 (19.7.12) は当然その他の $SU(3)$ 多重項にも影響を及ぼす. これは擬スカラー 8 重項以外のどの多重項についても 1 次の摂動として取り扱うことができ, したがって一般の多重項 $|i\rangle$ の質量行列に,

$$\delta m_{ij} = \langle i|\bar{\tilde{q}} M_q \tilde{q}|j\rangle \tag{19.7.31}$$

のずれを引き起こす. また $SU(3)$ を使って[41] 様々な行列要素 $\langle i|\bar{\tilde{q}}_r \tilde{q}_s|j\rangle$ を関係付けることが可能だ. このようにして,

$$\frac{\delta m_p - \delta m_n}{m_u - m_d} = \frac{m_\Xi - m_\Sigma}{m_s} \tag{19.7.32}$$

を容易に示すことができる. これと (19.7.22) を使うと核子の質量差へのクォーク質量の寄与は $\delta m_p - \delta m_n \approx -2.5$ MeV となる. この結果を (19.5.65) と (19.5.66) で使うと, 低エネルギー・パイ中間子・核子相互作用におけるアイソスピン対称性の主要な破れを計算できる. もちろんここでの定義どおり $\delta m_p - \delta m_n$ は陽子・中性子間の質量差全体ではなく, 全体の質量差には光子の放出・吸収からも重要な寄与がある. 中性子は電気的に中性なので, この電磁項はほぼ確実に正だ. このことは, 観測にかかる陽子・中性子間の質量差が -1.3 MeV で電磁相互作用によって説明されるべき寄与が $+1.2$ MeV 残されているという事実と一致する. 残念ながらこの電磁相互作用による質量差を精確に計算するのは難しい.

19.8 有効場理論のアノマリー項*

前の 3 節で述べた有効場理論の手順を実行する際に, 作用は理論の仮定した対称性から許される可能な全ての項を含んでいる必要があ

---

*この節はこの本の議論の本筋からは多少外れているので, 最初読むときには飛ばしてもよい.

る. これらの節で述べた方法を使えば, 全ての明白に不変な項を見つけることができる. それは, 19.6 節で述べた共変微分の一般的な形式を使うか, あるいはカイラル対称性の場合には 19.7 節の $U(x)$ のように非線形な拘束条件を満たし線形に変換する場を使ってできる. しかし有効場理論の作用には, 不変でない 4 次元ラグランジアン密度の積分で与えられるが破れた対称性のもとでの変化分が時空微分になっていて対応する作用項を不変に保つという意味で異常な (anomalous) 別の項が存在し得る.

22.7 節で見るように, そのような項は $SU(3) \times SU(3)$ の場合にヴェス (Wess) とズミノ (Zumino)[42]によって, クォーク・ループのダイアグラムからくる「アノマリー」(anomaly) の研究で発見された. しかし, この項の構造は基礎にあるクォークとグルーオンの理論について何も知らなくても理解できる.

ヴェス・ズミノ項を記述する最も簡単な方法はウィッテン (Witten)[43]によって導入された時空を 5 次元に拡張することだ. 有効場理論の場がどの方向についても $x^\mu \to \infty$ で共通の極限に近づくことを要求するかぎり, 時空は球面 S_4 のトポロジーを持つと考えることができる. ここで無限遠点は通常の点として含まれる. 19.6 で述べたように, 群 G が部分群 H に破れる際に, ゴールドストン・ボゾン場 ξ_a の任意の時空点での可能な値は剰余類空間 G/H (G の元の空間で, 二つの元が H の元を右からかける分だけ異なっているなら同一視する) の点を定義していると見なせる. したがって関数の組 $\xi_a(x)$ は時空の S_4 球面から G/H への写像を表す. G/H のトポロジーに依っては, G/H の任意の 4 次元球面を点に滑らかに変形することが可能だ. つまり, 任意の $\xi_a(x)$ を $0 \geq s \geq 1$ で定義される連続関数 $\xi_a(x; s)$ に拡張できる. ここで $\xi_a(x; 0) = \xi_a(x)$ で, $\xi_a(x; 1)$ は元の球面の任意の固定点 (例えば $\xi_a = 0$) だ. これが成り立つとき, 数学的にはホモトピー群 $\pi_4(G/H)$ は自明だという. (ホモトピー群の議論については

23.2 節を見よ.) $SU(N) \times SU(N)$ が $SU(N)$ に自発的に破れる場合には, これが成り立っていることが知られている. なぜなら剰余類空間 $SU(N) \times SU(N)/SU(N)$ は $SU(N)$ 自身のトポロジーを持つからだ.** したがって物理的に興味がある $G = SU(3) \times SU(3)$, $H = SU(3)$ の場合に, ゴールドストン・ボゾン場, あるいは同等な $U(x)$ ((19.7.9) を見よ) を, 5 次元球体 B_5 で定義されるユニタリーでユニモジュラな行列 $U(y)$ に拡張できる. ここで B_5 は座標 x^μ と s を持ち, その表面は時空の 4 次元球面だ.

次に $U(y)$ から作られる関数,

$$\omega(y) \equiv -\frac{i}{240\pi^2}\epsilon^{ijklm}\mathrm{Tr}\left\{U^{-1}\frac{\partial U}{\partial y^i}U^{-1}\frac{\partial U}{\partial y^j}\right. \\ \left. \times U^{-1}\frac{\partial U}{\partial y^k}U^{-1}\frac{\partial U}{\partial y^l}U^{-1}\frac{\partial U}{\partial y^m}\right\} \tag{19.8.1}$$

を考える. ここで添字 i, j, 等は座標 x^μ と s から成る 5 次元座標の方向の値をとる. (位相と数係数は後で便利なように選んである.) これはカイラル変換 (19.7.8) のもとで明白に不変だ. また, ϵ^{ijklm} はテンソル密度なので, $\omega(y)$ の全 5 次元球体にわたる積分は明らかに 5 次元座標 y^i の選び方に (符号を除いて) 依らない. さらに, この積分は球体の表面, つまり時空で $U(y)$ がとる値にしか依存しない. この最後の点を確かめるには, 球体の内側で $U(y)$ の微小な変分 $\delta U(y)$ をとると $\omega(y)$ は微分,

$$\delta\omega(y) = -\frac{i}{48\pi^2}\epsilon^{ijklm}\frac{\partial}{\partial y^m}\mathrm{Tr}\left\{U^{-1}\frac{\partial U}{\partial y^i}U^{-1}\frac{\partial U}{\partial y^j}\right. \\ \left. \times U^{-1}\frac{\partial U}{\partial y^k}U^{-1}\frac{\partial U}{\partial y^l}U^{-1}\delta U\right\} \tag{19.8.2}$$

だけ変化することに留意すればよい (この計算は 23.4 節を見よ). よって $U(y)$ の時空での値に影響のない変化は, その表面が時空になってい

**このことは, $SU(N)$ の元 $U(x)$ を使って $SU(N) \times SU(N)$ における $SU(N)$ の右剰余類を表すことができるという事実によって示せる.

る 5 次元球体 B_5 全体での (19.8.1) の積分に影響しない. したがってこの積分は以下のように作用の項の一つとして含めることができる.

$$I_{\mathrm{WZW}}[U]=n\int_{B_5}d^5y\,\omega(y)\,. \tag{19.8.3}$$

ここで n は今のところ任意の係数だ.

この項はラグランジアン密度の 4 次元積分で書けるが, それは $(SU(3)\times SU(3))$ 不変なラグランジアン密度ではない. (19.7.9) を使うと中間子場が小さい極限で $\omega(x)$ の主要な項は,

$$\omega(x)\to\frac{8\sqrt{2}}{15\pi^2F_\pi^5}\epsilon^{ijklm}\,\mathrm{Tr}\left\{\frac{\partial B}{\partial y^i}\frac{\partial B}{\partial y^j}\frac{\partial B}{\partial y^k}\frac{\partial B}{\partial y^l}\frac{\partial B}{\partial y^m}\right\} \tag{19.8.4}$$

となる. ここで B はゴールドストン・ボゾン場の行列 (19.7.11) だ. するとガウスの定理から,

$$I_{\mathrm{WZW}}[U]=\frac{8\sqrt{2}n}{15\pi^2F_\pi^5}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\int_{S_4}d^4x\,\mathrm{Tr}\left\{B\frac{\partial B}{\partial x^\mu}\frac{\partial B}{\partial x^\nu}\frac{\partial B}{\partial x^\rho}\frac{\partial B}{\partial x^\sigma}\right\}$$
$$+O\left(\frac{B^6}{F_\pi^6}\right) \tag{19.8.5}$$

が得られる. これはカイラル不変だが, カイラル不変な密度の時空積分で書くことはできない. なぜなら, どのようなカイラル不変な密度もゴールドストン・ボゾン場の 1 次および高次共変微分から作られなければならず, よってそのような密度はゴールドストン・ボゾン場の冪で展開すると B そのものではなく B の微分だけを含む項から始まるはずだからだ.

ウィッテンが指摘したように, この項を有効作用に含めるとそれまでの $SU(3)\times SU(3)$ 有効場理論と実験との矛盾が解決した. 有効ラグランジアン (19.7.28) と (19.7.30) (あるいはこの種の高次項) には $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ の項が現れないので, パリティの保存からこれらの項はゴールドストン・ボゾン場について偶でなければならず, $K+\bar{K}\to 3\pi$ のような過程は禁止される. 基礎にある量子色力学の理論にはそのような選

択則を説明する対称性が存在しないばかりでなく, ウィッテンが指摘したように ϕ 中間子は $K+\bar{K}$ と 3π の両方の終状態に崩壊することが観測されるというそれに反する実験的証拠さえ存在する. (19.8.5) より分かるように, この望ましくない選択則は作用のヴェス・ズミノ・ウィッテン項により取り除かれる.

驚くべきことに, ヴェス・ズミノ・ウィッテン項の係数は自由に調整できるパラメータではない. これはウィッテンが示したように,[43] ヴェス・ズミノ・ウィッテン項は, B_5 内の関数 $U(y)$ を時空境界 S_4 上の $U(x)$ に影響を与えずに滑らかに変形しても変化しないが, 境界上での $U(x)$ を変えない不連続な $U(y)$ の変形によって変化し得るからだ. 5 次元球体 B_5 は 5 次元球面 S_5 の半分で, 時空 S_4 は B_5 と残り半分の B'_5 の境界と考えることができる. (S_5 を地球表面に, また時空 S_4 を赤道, B_5 と B'_5 を北半球と南半球に類似させて考えよ.) S_4 は S_5 の残り半分の境界でもあるので, ヴェス・ズミノ・ウィッテン項をまったく同じように,

$$I'_{\text{WZW}}[U] = -n\int_{B'_5} d^5y\,\omega(y) \tag{19.8.6}$$

と書くことができる. ここで負符号が付いているのは B'_5 の境界が裏向きの 4 次元球面だからだ. 項 (19.8.3) と (19.8.6) が任意のゴールドストン・ボゾン場について等しいと要求することは $n=0$ と置かなければ不可能だが, 経路積分の重み因子 $\exp(iI)$ が項 (19.8.3) と (19.8.6) の差に影響されないためには, この差が 2π の整数倍でありさえすればよい. すなわち,

$$I_{\text{WZW}}[U] - I'_{\text{WZW}}[U] = n\int_{S_5} d^5y\,\omega(y) = 2\pi \times \text{integer} \tag{19.8.7}$$

が満たされていればよい. 規格化因子を $\omega(y)$ の定義 (19.8.1) のとおりにすると, $\omega(y)$ の任意の 5 次元球面全体での積分は値 2π を持つことが分かる.[44] したがって係数 n は整数でなければならない.

ヴェス・ズミノ・ウィッテン項の例は, $(SU(3)\times SU(3))$ 不変なラグランジアン密度の 4 次元積分でないにもかかわらず $SU(3)\times SU(3)$ のもとで不変なアノマリー項が, 必ずしもクォーク・ループとは関連せずに, 作用として他にも存在するかもしれないという疑問を生じさせる. 幸い, 答は否だ. 一般の群 G が任意の部分群 H (ただし $\pi_4(G/H)=0$) に破れる場合に, ゴールドストン・ボゾン場の作用のどのような項 $F[\xi]$ も常に, 時空の 4 次元球面 S_4 を境界に持つ 5 次元球体 B_5 全体にわたる G 不変な 5 形式 Ω の積分として以下のように書くことができることが示されている.[45]

$$F[\xi]=\int_{B_5} d^5y\,\epsilon^{ijklm}\,\frac{\partial\xi_a}{\partial y^i}\frac{\partial\xi_b}{\partial y^j}\frac{\partial\xi_c}{\partial y^k}\frac{\partial\xi_d}{\partial y^l}\frac{\partial\xi_e}{\partial y^m}\,\Omega_{abcde}(\xi(y))\,. \qquad (19.8.8)$$

これが $\xi_a(x)$ の 5 次元球体内部への拡張の特別な仕方に依らないためには次の意味で完全 (exact) でなければならない. つまり 5 次元球体上で Ω は次のように 4 形式の外微分で,

$$\Omega_{abcde}(\xi)=(\partial/\partial\xi_{[a})\mathcal{L}_{bcde]}(\xi) \qquad (19.8.9)$$

(角括弧はいつものとおり囲まれた添字に関する反対称化を意味する),

$$F[\xi]=\int_{S_4} d^4x\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\frac{\partial\xi^a}{\partial x^\mu}\frac{\partial\xi^b}{\partial x^\nu}\frac{\partial\xi^c}{\partial x^\rho}\frac{\partial\xi^d}{\partial x^\sigma}\mathcal{L}_{abcd}(\xi) \qquad (19.8.10)$$

とならなければならない. したがって Ω はまた閉じている. すなわち, その外微分はゼロになる.

$$(\partial/\partial\xi_{[f})\,\Omega_{abcde]}(\xi)=0\,. \qquad (19.8.11)$$

4 形式 $\mathcal{L}_{abcd}(\xi)$ もまた G 不変な場合は, 汎関数 (19.8.10) はちょうど前の 3 節で議論した通常の明白に G 不変な作用の項の一つだ. 作用のアノマリー項は, $\Omega(y)$ のあらゆる項は G 不変でありかつ 4 形式の外微分だが, ある項は G 不変な 4 形式の外微分でないという可能性から生

じる. したがって作用の新しい項は, 閉じた G 不変な 5 形式のうちどの実の線形結合も G 不変な 4 形式の外微分ではないという意味で独立なものと同定できる. これは数学ではド・ラームのコホモロジー群 $H^5(G/H;\mathbf{R})$ と呼ばれる. (群の積の規則はここでは単純な和だ.) ド・ラームのコホモロジー群は様々なトポロジーを持つ多様体について計算されている.[46] 特に, $H^5(SU(N)\times SU(N)/SU(N);\mathbf{R})$ は (19.8.1) で与えられるただ一つの生成子を持つ. したがって基礎にあるクォークとグルーオンの理論について何も知らなくても, ゴールドストン・ボゾンの作用のアノマリー項については, 整数 n の値以外, 全てのことが分かる. 22.7 節で $SU(N_c)$ ゲージ理論ではこの整数はカラーの数 N_c に等しいことを見る. 量子色力学ではその値は $n=3$ だ.

19.9 破れていない対称性

理論が群 G のもとで不変 (あるいは近似的に不変) で部分群 H に自発的に破れているという仮定から, ゴールドストン・ボゾンとその低エネルギーでの相互作用の性質がどのように演繹されるかを見てきた. しかしこれらの方法を G が $SU(2)\times SU(2)$ または $SU(3)\times SU(3)$ の場合に適用する際に, $SU(2)\times SU(2)$ または $SU(3)\times SU(3)$ が非カイラルな $SU(2)$ または $SU(3)$ 部分群に破れるという対称性の破れのパターンを実験に合うように採用しなければならなかった. 質量ゼロの u, d, s クォークのときには $SU(3)\times SU(3)$ 対称性が量子色力学では実際に自発的に破れることを 22.5 節で示す. しかし, u と d だけが質量ゼロの $SU(2)\times SU(2)$ 対称性もまた自発的に破れることを, 量子色力学に基づいて示すのはもっと難しい.* 他方, **質量持続条件** (persistent

*ワインガルテン (Weingarten)[47] は格子の方法を使って, カイラル対称性が破れているか否かにかかわらず, 量子色力学で質量ゼロの u と d クォークから成る最も軽い粒子はパイ中間子の量子数を持たなければならないことを示した. 22.5 節で見るように, 量子色力学でのフェルミオン・ループによるアノマリーの存在とクォークの閉じ込

mass condition)[48]と呼ばれる仮説に基づいて, 非カイラルな $SU(2)$ または $SU(3)$ 部分群は破れていないという直感的な議論がある. これは, 複合粒子は, それを構成する粒子の質量がゼロでなければ, 質量ゼロにならないという仮説だ. アイソスピン保存則のような非カイラルな対称性は, クォークの質量が等しければ破れていない. そしてもしそれが自発的に破れていれば, 質量がゼロでないクォークの複合粒子として質量ゼロのゴールドストン・ボゾンが作られたことになり, 質量持続条件と矛盾する. 以下で, 量子色力学のようなゲージ理論でクォークの質量により破れていない非カイラルな対称性は自発的に破れないというバファ(Vafa)とウィッテン[49]による証明を示す. この結果は単なる理論上の興味以上のものを含んでいる. 21.4 節で見るように, 電弱ゲージ対称性の自発的破れは量子色力学に類似の「テクニカラー (technicolor)」理論で記述される可能性があり, この考え方を試す際にこの理論でどの対称性が破れずに残るかを知ることは重要だ.

量子色力学のような, ゲージ群の同一の表現に属するいくつかのフェルミオン「フレーバー」を持つゲージ理論を考えよう. 全てのフェルミオンが質量を持てば, フェルミオン・フレーバーに作用しフェルミオンの質量行列と交換する全てのユニタリーな大域的非カイラル変換のもとで理論は不変だ. 例えば, n_1 個のフェルミオンが共通の縮退した質量 m_1 を持ち, n_2 個のフェルミオンが別の共通の縮退した質量 m_2 を持ち, 等々ならば, この大域的対称性の群は $U(n_1)\times U(n_2)\times\ldots$ だ. (特別な場合として, 縮退がまったくなければ $U(1)\times U(1)\times\ldots$ のもとでの大域的対称性が存在する. その例は量子色力学でのバリオン数, ストレンジネス等の保存則だ.) これらの対称性は自発的に破れることができない.

これを証明するために, r 個のフェルミオンと反フェルミオンの場

めの仮定から, あるハドロンは質量ゼロであることが要求される. したがってパイ中間子は質量ゼロであり, このことはカイラル対称性が自発的に破れていることを強く示唆する.

の一般的なグリーン関数を考えよう.** 経路積分形式ではこれは,

$$\langle T\left\{\Psi_{u_1k_1}(x_1)\cdots\Psi_{u_rk_r}(x_r)\,\Psi^\dagger_{v_1l_1}(y_1)\cdots\Psi^\dagger_{v_rl_r}(y_r)\right\}\rangle_{\rm VAC}$$
$$=\frac{1}{Z}\int[dA][d\psi][d\psi^\dagger]\,\psi_{u_1k_1}(x_1)\cdots\psi_{u_rk_r}(x_r)\,\psi^\dagger_{v_1l_1}(y_1)\cdots\psi^\dagger_{v_rl_r}(y_r)$$
$$\times\exp\left(iI_{\rm gauge}[A]+iI_{\rm Dirac}[\psi,\psi^\dagger\,;A]\right) \tag{19.9.1}$$

と表される.† ここで $k_1\ldots k_r$ と $l_1\ldots l_r$ はディラックの添字, $u_1\ldots u_r$ と $v_1\ldots v_r$ はフレーバーの添字, $I_{\rm gauge}[A]$ はゲージ場のみのゲージ理論の作用, $I_{\rm Dirac}[\psi,\psi^\dagger\,;A]$ はゲージ場 $A^\mu_\alpha(x)$ が存在するときのディラック場の作用, Z は以下の真空・真空振幅だ.

$$Z\equiv\int[dA][d\psi][d\psi^\dagger]\,\exp\left(iI_{\rm gauge}[A]+iI_{\rm Dirac}[\psi,\psi^\dagger;A]\right)\,. \tag{19.9.2}$$

ここで $x^4=x_4=ix^0$, $y^4=y_4=iy^0$, $A^4_\alpha=A_{4\alpha}=iA_{0\alpha}$ の全てが実のユークリッド時空に移る必要がある. (23 章の補遺 A を見よ.) この場合, ディラック作用は次のとおりだ.

$$I_{\rm Dirac}[\psi,\psi^\dagger;A]=i\int d^3x\int dx^4\;\psi^\dagger\,[\not{D}+M]\,\psi\,. \tag{19.9.3}$$

ここで M はフェルミオンの質量行列, $\not{D}$ はユークリッド・ゲージ共変微分とユークリッド・ディラック行列との縮約だ.

$$\not{D}=\sum_{i=1}^{4}(\partial_i-it^\alpha A_{i\alpha})\,\gamma_i\,. \tag{19.9.4}$$

**バッファとウィッテンは元の論文[49]でまず $r=1$ で $x=y$ の場合に対称性の破れがないことを証明し, 次にこの真空期待値に対称性の破れがないからといって他のグリーン関数に自発的対称性の破れが起こる可能性は排除できないことを見て, 別の証明方法に移った.

†15.5 節で見たように, 分子分母ともにゲージ群の無限大の体積に比例し, それらは (19.9.1) の比で相殺する. この無限大の因子は以下の議論の厳密性を損なうが, ゴーストを導入して無限大を取り除こうとすると, 作用の正定値性に依存する以下のいくつかの段階で困難が生じる. この問題を解決するための一つの方法は連続時空を有限の格子点で置き換えることだ. そうするとゲージ群は有限体積を持ちゲージ固定やゴーストが不要になる.

ここで通常どおり $\gamma_4 = i\gamma^0$ ととる. 作用はフェルミオン場について 2 次なので, これらの場の積分を陽に実行できて,

$$
\begin{aligned}
&\langle T\left\{\Psi_{u_1 k_1}(x_1)\cdots\Psi_{u_r k_r}(x_r)\Psi^{\dagger}_{v_1 l_1}(y_1)\cdots\Psi^{\dagger}_{v_r l_r}(y_r)\right\}\rangle_{\rm VAC} \\
&\quad = \frac{1}{Z}\int [dA]\ \mathrm{Det}\ (\not{D} + M)\ \exp\left(iI_{\rm gauge}[A]\right) \\
&\quad \times \left[(\not{D}+M)^{-1}_{x_1\,u_1\,k_1,\,y_1\,v_1\,l_1}\cdots(\not{D}+M)^{-1}_{x_r\,u_r\,k_r,\,y_r\,v_r\,l_r} \pm [\text{置換項}]\right]
\end{aligned}
\tag{19.9.5}
$$

が得られる. ここで「± [置換項]」は ψ 場の $r!$ 個の全ての置換についての和をとらなければならない. ただし奇置換の場合には負符号を付け, また, Z は次のとおりだ.

$$
Z = \int [dA]\ \mathrm{Det}\ (\not{D} + M) \exp\left(iI_{\rm gauge}[A]\right) . \tag{19.9.6}
$$

(19.9.5) の表現は質量行列 M と交換するユニタリーなフレーバーの添字についてのあらゆる変換のもとで明白に不変だ. ゲージ場とゴーストについての汎関数積分によってどのような非摂動論的効果が生成されるかは問題にならない. これらの場は今問題となっている対称性によって変換されず, よって (19.9.5) で残っている汎関数積分はこれらの対称性を破ることができない.†† しかしこの議論に説得力を持たせるには, (19.9.5) の表現がよく定義されていることを示す必要がある.

これは数学的厳密性という単に理論上の問題ではない. 19.1 節で見たように, 対称性が自発的に破れていないしるしは, 対称性変換のもとで基底状態が不変だというだけでなく, 基底状態の対称性が小さな摂動に対して安定だということだ. もし小さな摂動 δM を加えて M の対称性を破り, その上で表現 (19.9.5) が $\delta M \to 0$ で特異性を持つな

†† クォークの質量がゼロでない量子色力学で P, C, T が自発的に破れないことを示すのはもっと難しい. なぜならこれらの対称性はゲージ場に自明でない作用をおよぼすからだ. バッファとウィッテン[50]は文献 49 の方法を適用して量子色力学では P が自発的に破れていないことを示した.

ら, 対称性を破る行列要素の δM の因子は行列要素の $\delta M = 0$ での特異性により相殺されることが可能だ. 正確には, これが起こるのは, M のいくつかの固有値がゼロになる対称性の極限で生じるカイラル対称性の場合だ. この場合, 質量ゼロの対称性の極限に近づくと, 対称性を破る期待値の分子の質量因子は $\not{D}$ がゼロ固有値を持つあらゆる場合にプロパゲータ $(\not{D}+M)^{-1}$ の分母の質量因子と相殺する. このため, ここでの議論は質量行列 M のどの固有値もゼロでない理論の非カイラル対称性についてのみ成り立つ.

この場合, (19.9.5) の行列要素の上限を知るには, まず微分演算子 (19.9.4) がここでは反エルミートなので, エルミート行列 M がゼロ固有値を持たない限り $\not{D}+M$ はよく定義された逆を持つことに留意する. 例えば $U(n)$ 対称性の場合にその n 個の固有値が等しいといった対称性の条件を M が満たせば, (19.9.5) のゲージ場についての残りの積分は, Z での積分を含めて, この表現に特異性を生じさせないということを示すことは依然必要だ. 以下で見るように, これは, ある大域的対称性変換のもとで不変なフェルミオンの質量行列 M にこの対称性を破る小さな摂動項 δM を付け加えたとき, この対称性変換のもとでの期待値 (19.9.5) の変化が $\delta M \to 0$ でゼロになることを保証する.

座標空間でのグリーン関数 (19.9.5) に特異性がないことを示すのは難しいので, 代わりにぼかした場,

$$\Psi_u[f] \equiv \int d^4x\, f^{k\dagger}(x)\, \Psi_{uk}(x) \tag{19.9.7}$$

についての行列要素を考えよう. ここで $f^k(x)$ は任意の滑らかな 2 乗可積分関数だ. これを用いて (19.9.5) は,

$$\begin{aligned}
&\Big\langle T\left\{\Psi_{u_1}[f_1]\cdots\Psi_{u_r}[f_r]\,\Psi^\dagger_{v_1}[g_1]\cdots\Psi^\dagger_{v_r}[g_r]\right\}\Big\rangle_{\rm VAC}\\
&\quad=\frac{1}{Z}\int[dA]\,{\rm Det}\,(\not{D}+M)\,\exp\left(iI_{\rm gauge}[A]\right)\\
&\qquad\times\left[(\not{D}+M)^{-1}_{f_1\,u_1,\,g_1\,v_1}\cdots(\not{D}+M)^{-1}_{f_r\,u_r,\,g_r\,v_r}\pm[\text{置換項}]\right]
\end{aligned}$$

(19.9.8)

となる．ここで次のような定義を使った．

$$(\not{D}+M)^{-1}_{f\,u,\,g\,v} \equiv \int d^4x \int d^4y\; f^{k\dagger}(x)\;(\not{D}+M)^{-1}_{x\,u\,k,\,y\,v\,l}\; g^l(y)\;. \tag{19.9.9}$$

この基底では，与えられたゲージ場についてのフェルミオンのプロパゲータはよく定義されているばかりでなく，$A^\mu_\alpha(x)$ に関して，

$$\left|(\not{D}+M)^{-1}_{f\,u,\,g\,v}\right| \leq \sum_a \frac{1}{|m_a|} \tag{19.9.10}$$

と一様に有界だ．‡ ここで m_a は M の固有値だ．また，都合で関数 $f_i(x)$ と $g_j(y)$ を以下のように規格化している．

$$\int f^\dagger_i(x) f_i(x)\, d^4x = \int g^\dagger_j(y) g_j(y)\, d^4y = 1\;. \tag{19.9.11}$$

---

‡これを見るには，M の固有ベクトル，

$$M_{uv} c^a_v = m_a\, c^a_u\;, \qquad c^{a\,*}_u c^b_u = \delta_{ab}$$

で展開し，バッファとウィッテンの手法[49]を応用して (19.9.9) を，

$$\begin{aligned}(\not{D}+M)^{-1}_{f\,u,\,g\,v} &= \sum_a c^{a\,*}_u c^a_v \int d^4x \int d^4y\; f^{k\dagger}(x)\;(\not{D}+m_a)^{-1}_{x\,k,\,y\,l}\; g^l(y)\\ &= \sum_a \pm\, c^{a\,*}_u c^a_v \int_0^\infty d\tau \exp(-|m_a|\tau)\\ &\quad\times \int d^4x \int d^4y\; f^{k\dagger}(x)\;(\exp(\mp\tau\,\not{D}))_{x\,k,\,y\,l}\; g^l(y)\end{aligned}$$

と書けばよい．ここで ± は m_a の符号だ．行列 $c^{a\,*}_u c^a_v$ と演算子 $(\exp(\mp\tau\,\not{D}))_{x\,k,\,y\,l}$ はともにユニタリーなので，

$$\begin{aligned}&\left|c^{a\,*}_u c^a_v \int d^4x \int d^4y\; f^{k\dagger}(x)(\exp(\mp\tau\,\not{D}))_{x\,k,\,y\,l}\, g^l(y)\right|^2\\ &\qquad\leq \int d^4x\, |f(x)|^2 \int d^4y\, |g(y)|^2 = 1\end{aligned}$$

が成り立つ．積分の内部でこれを使うと (19.9.10) が得られる．

(和の記法はここでは決めないでおく.) さらに, ゲージ場についての平均をとる重み関数は以下のように正だ.‡‡

$$\text{Det}\,(\not{D}+M)\exp\left(iI_{\text{gauge}}[A]\right)$$
$$=\exp\left(-\tfrac{1}{4}\int d^3x\int dx^4\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}F_{ij}{}^2\right)\sqrt{\text{Det}\left[(iD)^2+M^2\right]}\,. \tag{19.9.12}$$

重み関数が正なら, どのような関数の平均もその関数の上限を越えることはない. (19.9.8) で上限 (19.9.10) を使うと, 行列要素は,

$$\left|\langle T\left\{\Psi_{u_1}[f_1]\cdots\Psi_{u_r}[f_r]\,\Psi^\dagger_{v_1}[g_1]\cdots\Psi^\dagger_{v_r}[g_r]\right\}\rangle_{\text{VAC}}\right|\leq r!\left[\sum_a\frac{1}{|m_a|}\right]^r \tag{19.9.13}$$

で抑えられる. したがって M の対称性を破る項 δM がゼロになったときδM の因子を相殺し得る特異性は存在しない. このことをより陽に見るために, 同じ方法を使ってもし M に小さな対称性を破る項 δM を摂動として加えると (19.9.8) の δM について 1 次の項は,

$$\left|\delta\langle T\left\{\Psi_{u_1}[f_1]\cdots\Psi_{u_r}[f_r]\,\Psi^\dagger_{v_1}[g_1]\cdots\Psi^\dagger_{v_r}[g_r]\right\}\rangle_{\text{VAC}}\right|$$
$$\leq r\,r!\sum_{a,b}\frac{|(\delta M)_{ab}|}{|m_a m_b|}\left[\sum_a\frac{1}{|m_a|}\right]^{r-1} \tag{19.9.14}$$

で抑えられ, よってこれは $\delta M\to 0$ でゼロになることを示すことができる.

実際の世界ではクォーク質量はゼロではないし縮退もしていないので, 上の議論からただちにバリオン数, ストレンジネス等の保存則のような $U(1)$ 対称性は自発的にも元からも破れていないことが分かる. アイソスピンや $SU(3)$ のような強い相互作用のその他の対称性はもっ

---

‡‡フェルミオン行列式で, $\text{Det}\,(\not{D}+M)=\text{Det}\,\gamma_5\,(\not{D}+M)\,\gamma_5=\text{Det}\,(-\not{D}+M)$ の事実を使う.

と問題を含んでいる. これらの対称性は, もし u と d クォーク, あるいは u, d, s クォークがゼロでない等しい質量を持っていたなら完全に保存するだろう. しかし 19.7 節で見たように, これらの質量はまったく縮退していない. アイソスピンと $SU(3)$ の対称性は, クォークの質量が小さいから生じているのであって等しいからではない. これらの対称性は, 2 個または 3 個のクォークに等しい質量を与えその質量を任意に小さくすれば確かに破れずに残る. よってアイソスピンまたは $SU(3)$ は小さなクォーク質量に敏感でないどの過程においても, よい対称性だ. しかし全ての過程がこれらの質量に敏感でない訳ではない. なぜなら 2 個または 3 個のクォークの質量がゼロの場合, パイ中間子やそれが属する擬スカラー中間子 8 重項は質量ゼロになるからだ. これはアイソスピンについては問題ではない. なぜなら 19.5 節で見たようにパイ中間子 3 重項は, $m_u \neq m_d$ にもかかわらず, クォーク質量の 1 次で縮退したままだからだ. $SU(3)$ の場合, クォークの質量差はパイ中間子, K 中間子, η 中間子の間に 1 次の質量差を生じ, よって 1 中間子の極が主要になる過程では $SU(3)$ からの大きなずれが見られる可能性がある.

19.10 $U(1)$ 問題

量子色力学は強い相互作用の対称性のパターンを説明するのに成功したが, その成功は初めのうち一つの失敗によって損なわれているように思われた. 19.5 節で見たように, 強い相互作用の破れた $SU(2) \times SU(2)$ 対称性は u および d クォークの質量が小さいことの自然な帰結だ. しかし u および d クォークの質量が小さい量子色力学のラグランジアンにはまた別のカイラル対称性,[51] つまり変換,

$$u \to \exp(i\gamma_5\theta)u\,, \qquad d \to \exp(i\gamma_5\theta)d \tag{19.10.1}$$

のもとでの $U(1)_A$ 対称性がある. そのような対称性はもし破れていなければ $SU(2)\times SU(2)$ と同様にハドロンのスペクトルにパリティ 2 重項の存在を要求するが, そのようなパリティ 2 重項は観測されていない. 他方, 破れた $U(1)_A$ 対称性はパイ中間子の質量に匹敵する質量のアイソスカラー 0^- ゴールドストン・ボゾンの存在を意味するが, このゴールドストン・ボゾンも観測されていない. 確かに η 中間子はアイソスカラー 0^- ボゾンだが, それはパイ中間子より相当重く, また 19.7 節で見たように, それは $SU(3)\times SU(3)$ のゴールドストン・ボゾンの一つとしてよく理解できる. s クォークを u および d クォークと同様に比較的軽いと見なすと, 量子色力学のラグランジアンは $SU(3)\times SU(3)$ に加えて変換,

$$u \to \exp(i\gamma_5\theta)u\,, \qquad d \to \exp(i\gamma_5\theta)d\,, \qquad s \to \exp(i\gamma_5\theta)s \tag{19.10.2}$$

のもとでの $U(1)$ カイラル対称性を持つ. そのような対称性の自発的破れは 2 個のアイソスカラー 0^- 中間子の存在を要求する. そのひとつは η で, もう一つはパイ中間子の質量に匹敵する質量を持つ.

この予言はもっと陽にすることができる.[52] 質量ゼロの量子色力学の自発的に破れた対称性に変換 (19.10.2) を含めれば, クォークの質量が存在すると, 項 (19.7.12),

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = -\bar{q}\,M_q\,q = -\bar{\tilde{q}}\,e^{-i\sqrt{2}\gamma_5 B/F_\pi}\,M_q\,e^{-i\sqrt{2}\gamma_5 B/F_\pi}\,\tilde{q} \tag{19.10.3}$$

が現れる. ここで再び,

$$M_q = \begin{bmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{bmatrix} \tag{19.10.4}$$

だが, 今度は B は破れた対称性 (19.10.2) についてのゴールドストン・

ボゾン場 ζ を以下のように含む.

$$
B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta^0 & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta^0 & K^0 \\ \bar{K}^- & \bar{K}^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}\pi^0 \end{bmatrix}
+ \frac{F_\pi}{\sqrt{3}F_\zeta} \begin{bmatrix} \zeta & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & \zeta \end{bmatrix} . \tag{19.10.5}
$$

ただし F_ζ は $U(1)_A$ ゴールドストン・ボゾンとそれに対応するカレントとの未知の結合だ. (因子 $\sqrt{3}$ は後での便宜を考えて入れてある.) 再度, 破れていない $SU(3)$ 対称性を使ってクォーク双 1 次式の真空期待値を (19.7.14) の形で書くことができ, ボゾン場の冪で展開するとラグランジアンのゴールドストン・ボゾンの質量項は以下の形になる.

$$
\begin{aligned}
-\frac{v}{F_\pi^2} \operatorname{Tr}\{B, \{B, M_q\}\} = -\frac{v}{F_\pi^2}\Bigg[& 4m_u \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta^0 + \frac{F_\pi}{\sqrt{3}F_\zeta}\zeta \right)^2 \\
& + 4(m_u + m_d)\pi^+\pi^- + 4(m_u + m_s)K^+\bar{K}^- \\
& + 4m_d \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta^0 + \frac{F_\pi}{\sqrt{3}F_\zeta}\zeta \right)^2 \\
& + 4(m_d + m_s)K^0\bar{K}^0 \\
& + 4m_s \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\eta^0 + \frac{F_\pi}{\sqrt{3}F_\zeta}\zeta \right)^2 \Bigg] .
\end{aligned} \tag{19.10.6}
$$

荷電中間子とストレンジネスを持つ中間子の質量は従来どおりだが,

中性でストレンジネスを持たない中間子は次の質量行列を持つ.

$$M_0^2 = 8v \begin{bmatrix} \frac{m_u+m_d}{2F_\pi^2} & \frac{m_u-m_d}{2\sqrt{3}F_\pi^2} & \frac{m_u-m_d}{\sqrt{6}F_\pi F_\zeta} \\ \frac{m_u-m_d}{2\sqrt{3}F_\pi^2} & \frac{m_u+m_d+4m_s}{6F_\pi^2} & \frac{m_u+m_d-2m_s}{3\sqrt{2}F_\pi F_\zeta} \\ \frac{m_u-m_d}{\sqrt{6}F_\pi F_\zeta} & \frac{m_u+m_d-2m_s}{3\sqrt{2}F_\pi F_\zeta} & \frac{m_u+m_d+m_s}{3F_\zeta^2} \end{bmatrix} \tag{19.10.7}$$

ここで行と列は π^0, η^0, ζ の順だ.

m_u と m_d がゼロになる極限で, これは以下の二つの固有値ゼロの固有ベクトルを持つ.

$$u_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad u_b = \frac{1}{\sqrt{F_\pi^2 + 2F_\zeta^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ F_\pi \\ \sqrt{2}F_\zeta \end{pmatrix} . \tag{19.10.8}$$

この直交基底で, 質量 2 乗行列は m_u と m_d の 1 次で,

$$m_{aa}^2 \simeq u_a^{\mathrm{T}} M_0^2 u_a = \frac{4v\,(m_u + m_d)}{F_\pi^2} , \tag{19.10.9}$$

$$m_{bb}^2 \simeq u_b^{\mathrm{T}} M_0^2 u_b = \frac{12v\,(m_u + m_d)}{F_\pi^2 + 2F_\zeta^2} , \tag{19.10.10}$$

$$m_{ab}^2 = m_{ba}^2 \simeq \frac{\sqrt{3}v(m_u - m_d)}{2F_\pi\sqrt{F_\pi^2 + 2F_\zeta^2}} \tag{19.10.11}$$

となる. 非対角項 (19.10.11) は固有値の積をごくわずかな割合 $(m_u - m_d)^2/64(m_u+m_d)^2$ だけ小さくする効果を持つが, もちろん固有値の和を変えないので, 固有値はよい近似で対角要素 (19.10.9) と (19.10.10) で与えられる. (19.10.9) を (19.7.16) と比較すると, 固有ベクトル u_a

に対応する粒子は π^0 であることが分かる．他方の u_b に対応する粒子は質量，

$$m_b \simeq \sqrt{m_{bb}^2} \simeq \frac{\sqrt{3} m_\pi F_\pi}{\sqrt{F_\pi^2 + 2F_\zeta^2}} \leq \sqrt{3} m_\pi \tag{19.10.12}$$

を持つ．したがって破れた $U(1)_A$ 対称性は，パイ中間子自身に加えて，$\sqrt{3}m_\pi$ 以下の質量の中性擬スカラー・ゴールドストン・ボゾンを要求する．そのような強い相互作用をする粒子が存在しないことは言うまでもない.* 23.5 節で見るように，この問題は結局，この余分な $U(1)_A$ 対称性を破る非摂動論的な効果の発見によって解決された．

問題

1. 破れた大域的対称性の一般論を $SO(3)$ 群 (生成子は t_1, t_2, t_3) が $SO(2)$ 部分群 (生成子は t_3) に自発的に破れる場合に適用せよ．ゴールドストン・ボゾン場は微小 $SO(3)$ 変換のもとでどのように変換するか．(剰余類空間 $SO(3)/SO(2)$ の指数関数によるパラメータ化を用いよ.) ゴールドストン・ボゾン場および破れていない対称性の生成子 t_3 がゼロでない値 q を持つ一般の場の共変微分 $D_{a\mu}$ を求めよ．ゴールドストン・ボゾンのみを含み微分を 2 個以下だけ含む最も一般的な $SO(3)$ 不変なラグランジアンはどのようなものか．このラグランジアンを使ってゴールドストン・ボゾンの弾性散乱の不変振幅をエネルギーの最低次で計算せよ．非ゴールドストン・ボゾン場の二つの因子とせいぜい 1 個の微分を含む最も一般的な $SO(3)$ 不変なラグラン

* $F_\zeta \gg F_\pi$ ととると余分な中性擬スカラーは非常に軽い質量を持つが，その相互作用は極めて弱いので観測にかからなかったかもしれない．量子色力学で F_ζ と F_π の比が非常に大きくなることは起こりそうもないが，インスタントンによるパリティの破れを避けるために提案された余分な場を持つ理論ではこのようなことが起こる．これについては 23.6 節を見よ．

ジアンはどのようなものか. ゴールドストン・ボゾン場 (微分は含まない) のみの関数で $SO(3)$ 3 元ベクトルの第 3 成分のように変換するものは何か. ラグランジアンにこの項をつけ加えて, ゴールドストン・ボゾンが質量 m を持つようにその係数を選び, 最低次のゴールドストン・ボゾン散乱振幅を計算し直せ.

2. 大域的 $SU(N)$ 対称性が自発的に $SU(N-1)$ に破れる理論を考える. $SU(N)$ の基本表現 N に属する小さな摂動を加えて対称性を破ったとする. 真空の整列条件を考慮すると, どの対称性の群が破れずに完全に残るか. 対称性を破る摂動が $SU(N)$ の随伴表現に属する場合はどうか.

3. パイ中間子・パイ中間子散乱振幅を, ゼロでないパイ中間子質量を考慮して, 1 ループの次数で計算せよ.

4. パイ中間子・パイ中間子散乱の場合にアドラー・ワイスバーガーの和則の類似則である「アドラーの和則」を導け.

5. 剰余類 $SU(2)\times SU(2)/SU(2)$ が $\exp(i\xi_a x_a)$ とパラメータ化された場合のパイ中間子場 ξ_a の $SU(2)\times SU(2)$ 変換性を計算せよ.

6. (19.7.31) と $SU(3)$ 対称性を使って (19.7.32) の関係を導け.

参考文献

1. S. Coleman, 'Secret symmetry: an introduction to spontaneous symmetry breakdown and gauge fields,' *Aspects of Symmetry: Selected Erice Lectures of Sidney Coleman* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).

2. E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals* (Oxford University Press, Oxford, 1937) 1.4 節.

3. J. Goldstone. *Nuovo Cimento* **9**, 154 (1961).

4. Y. Nambu, *Phys. Rev. Lett.* **4**, 380 (1960).

5. J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **127**, 965 (1962).

6. S. Adler, *Phys. Rev.* **137**, B1022 (1965).

7. S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, **29**, 1698 (1972).

8. R. Dashen, *Phys. Rev.* **183**, 1245 (1969). この関係式への補正については以下を見よ. J. F. Donoghue, B. R. Holstein, and D. Wyler, *Phys. Rev.* **D47**, 2089 (1993); J. Bijnens, *Phys. Lett.* **B306**, 343 (1993); K. Maltman and D. Kotchan, *Mod. Phys. Lett.*, **A5**, 2457 (1990); R. Urech, *Nucl. Phys.* **B433**, 234 (1995); R. Baur and R. Urech, *Phys. Rev.* **D53**, 6552 (1996).

9. 総合報告については I. S. Towner *et al.*, Chalk River preprint nucl-th/9507005 (1995) を見よ.

10. S. Weinberg, *Phys. Rev.* **112**, 1375 (1958).

11. M. L. Goldberger and S. Treiman, *Phys. Rev.* **111**, 354 (1966).

12. T. Ericson and W. Weise, *Pions and Nuclei* (Clarendon Press, Oxford, 1988).

13. T. Ericson *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1046 (1995).

14. T. Das, G. S. Guralnik, V. S. Mathur, F. E. Low, and J. E. Young, *Phys. Rev. Lett.* **18**, 759 (1967).

15. J. Bernstein, S. Fubini, M. Gell-Mann, and W. Thirring, *Nuovo Cimento* **17**, 757 (1960); M. Gell-Mann and M. Lévy, Ref. 24; K-C. Chou, *Soviet Physics JETP* **12**, 492 (1961).

16. Y. Nambu, *Phys. Rev. Lett.* **4**, 380 (1960).

17. Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122**, 345 (1961).

18. Y. Nambu and D. Lurie, *Phys. Rev.* **125**, 1429 (1962); Y. Nambu and E. Shrauner, *Phys. Rev.* **128**, 862 (1962).

19. S. L. Adler, *Phys. Rev. Lett.* **14**, 1051 (1965); *Phys. Rev.* **140**, B736 (1965); W. I. Weisberger, *Phys. Rev. Lett.* **14**, 1047 (1965); *Phys. Rev.* **143**, 1302 (1965). パイ中間子の質量がゼロでない効果は文献 27 で, 別の方法で取り扱われている. それは, パイ中間子・核子散乱半径についてのカレント代数の結果を以下の文献にある前方散乱の分散関係から導いた散乱半径についての和則と結びつける方法だ. M. L. Goldberger, H. Miyazawa, and R. Oehme, *Phys. Rev.* **99**, 986 (1955); M. L. Goldberger, in *Dispersion Relations and Elementary Particles* (Wiley, New York, 1960) p. 146.

20. S. Weinberg, 'Current Algebra – Rapporteur's Report', *Proceedings of the International Conference on High-Energy Physics, Vienna, 1968* (CERN, Geneva, 1968) p. 253.

21. M. Gell-Mann, *Physics* **1**, 63 (1964).

22. S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **16**, 879 (1966).

23. S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **18**, 188 (1967).

24. M. Gell-Mann and M. Lévy, *Nuovo Cimento* **16**, 705 (1960).

25. S. Weinberg, *Phys. Rev.* **166**, 1568 (1968).

26. S. Weinberg, *Physica* **96A**, 327 (1979).

27. これらの散乱半径は最初に，カレント代数の手法を使って S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 616 (1966) により計算された．

28. 総合報告については J. F. Donoghue, E. Golowich, and B. R. Holstein, *Dynamics of the Standard Model* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992) VI-4 節．$\pi^- p$ 原子の 1s 状態の強い相互作用によるエネルギーのずれと幅の測定より，$a(\pi^- p \to \pi^- p) = \frac{2}{3}a_{1/2} + \frac{1}{3}a_{3/2} = 0.0885(9)m_\pi^{-1}$ と $a(\pi^- p \to \pi^0 n) = \frac{1}{3}\sqrt{2}(a_3 - a_1) = -0.136(10)m_\pi^{-1}$ の結果が得られている．これについては D. Sigg *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3245 (1995) を見よ．

29. S. Weinberg, *Phys. Lett.* **B251**, 288 (1990); *Nucl. Phys.* **B363**, 3 (1991); *Phys. Lett.* **B295**, 114 (1992). C. Ordóñez and U. van Kolck, *Phys. Lett.* **B291**, 459 (1992); C. Ordóñez, L. Ray, and U. van Kolck, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1982 (1994); U. van Kolck, *Phys. Rev.*, **C49**, 2932 (1994); U. van Kolck, J. Friar, and T. Goldman, *Phys. Lett. B*. 核力に関するこの研究方法は以下の文献にまとめられている．C. Ordóñez, L. Ray, and U. van Kolck, *Phys. Rev.* **C53**, 2086 (1996); J. Friar, *Few-Body Systems Suppl.* **99**, 1 (1996). これらの手法を関連する原子核過程に応用した結果については以下を見よ．T.-S. Park, D.-P. Min, and M. Rho, *Phys. Rep.* **233**, 341 (1993); *Nucl. Phys.* **A596**, 515 (1996); S. R. Beane, C. Y. Lee, and U. van Kolck, *Phys. Rev.*, **C52**, 2915 (1995); T. Cohen, J. Friar, G. Miller, and U. van Kolck, *Phys. Rev.* **C53**, 2661 (1996); D. B. Kaplan, M. Savage, and

M. Wise, *Nucl. Phys.* **B478**, 629 (1996).

30. S. Weinberg, 文献 27. パイ中間子・核子散乱半径は独立に Y. Tomozawa, *Nuovo Cimento* **46A**, 707 (1966) により計算された.

30*a*. S. L. Adler, *Phys. Rev.* **140**, B736 (1965).

31. S. Coleman, J. Wess, and B. Zumino, *Phys. Rev.* **177**, 2239 (1969) ; C. G. Callan, S. Coleman, J. Wess, and B. Zumino, *Phys. Rev.* **177**, 2247 (1969).

32. R. S. Palais, *J. Math. Mech.* **6**, 673 (1957); G. D. Mostow, *Annals of Math.* **65**, 432 (1957).

32*a*. 別の可能性については S. Weinberg, *Physica Scripta* **21**, 773 (1980) を見よ.

33. M. Gell-Mann, Cal. Tech. Synchotron Laboratory Report CTSL -20 (1961), 未発表. これは $SU(3)$ 対称性に関する他の論文とともに M. Gell-Mann and Y. Ne'eman, *The Eightfold Way* (Benjamin, New York, 1964) に再録されている.

34. Y. Ne'eman, *Nucl. Phys.* **26**, 222 (1961).

35. M. Gell-Mann, R. J. Oakes, and B. Renner, *Phys. Rev.* **175**, 2195 (1968); S. Glashow and S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **20**, 224 (1968).

36. R. Dashen, *Phys. Rev.* **183**, 1245 (1969). 補正は P. Langacker and H. Pagels, *Phys. Rev.* **D8**, 4620 (1973) により考察された. 文献 17 の模型の場合に π^0 の質量に電磁補正がないことは G. S. Guralnik, *Nuovo Cimento* **36**, 1002 (1965) により証明されていた.

37. S. Weinberg, I. I. Rabi の記念文集 *Trans. N. Y. Acad. Sci.* **38**, 185 (1977) への寄稿.

38. M. Gell-Mann, 文献 33; S. Okubo, *Prog. Theor. Phys.*, **27**, 949 (1962).

38*a*. H. Leutwyler, *Phys. Lett.* **B378**, 313 (1996).

38*b*. J. F. Donoghue, E. Golowich, and B. R. Holstein, 文献 28.

39. J. Gasser and H. Leutwyler, *Nucl. Phys.* **B250**, 465 (1985). J. Gasser and H. Leutwyler, *Ann. Phys.* **158**, 142 (1984) も見よ.

40. 総合報告としては以下を見よ. H. Leutwyler, *Proceedings of the XXVI International Conference on High Energy Nuclear Physics, Dallas, 1992*, J. Sanford 編 (American Institute of Physics, New York, 1993) 185; U. G. Meissner, *Rep. Prog. Phys.* **56**, 903 (1993); A. Pich, *Reports on Progress in Physics* **58**, 563 (1995); J. Bijnens, G. Ecker, and J. Gasser, *The Daphne Physics Handbook*, 1 巻, L. Maiani, G. Pancheri, N. Paver 編 (INFN, Frascati, 1995) 3 章と 3.1 節; G. Ecker, *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 35 巻 (Pergamon Press, Oxford, 1995) 1.

41. S. Coleman and S. Glashow, *Phys. Rev. Lett.* **6**, 423 (1961); S. Okubo, *Phys. Lett.* **4**, 14 (1963).

42. J. Wess and B. Zumino, *Phys. Lett.* **37B**, 95 (1971).

43. E. Witten, *Nucl. Phys.* **B223**, 422 (1983).

44. R. Bott and R. Seely, *Comm. Math. Phys.* **62**, 235 (1978).

45. E. D'Hoker and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D50**, R6050 (1994).

46. *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*, S. Iyanaga and Y. Kawada 編 (MIT Press, Cambridge, 1980); W. Greub, S. Halperin, and R. Vanstone, *Connections, Curvature and Cohomology*, III 巻 (Academic Press, New York, 1976); A. Borel, *Ann. Math.* (2) **57**, 115 (1953). A. Borel, *Collected Papers*, I 巻 (Springer Verlag, Berlin, 1983) も見よ.

47. D. Weingarten, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1830 (1983).

48. J. Preskill and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D24**, 1059 (1981). これは, それ以前の 't Hooft による大きなクォーク質量の極限を考察した議論の修正版だ. G. 't Hooft, Cargèse Summer Institute, 1979 での講義, *Recent Developments in Gauge Theories*, G 't Hooft *et al.* 編 (Plenum, New York, 1980) に収録, *Dynamical Gauge Symmetry Breaking*, E. Farhi and R. Jackiw 編 (World Scientific, Singapore, 1982) と G. 't Hooft, *Under the Spell of the Gauge Principle* (World Scientific, Singapore, 1994) に再録. 22.5 節も見よ.

49. C. Vafa and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B234**, 173 (1984). C. Vafa and E. Witten, *Commun. Math. Phys.* **95**, 257 (1984) も見よ.

50. C. Vafa and E. Witten, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 535 (1984).

51. S. L. Glashow, *Hadrons and Their Interactions*, A. Zichichi 編 (Academic Press, New York, 1968); S. L. Glashow, R. Jackiw, and S-S. Shei, *Phys. Rev.* **187**, 1916 (1969); M. Gell-Mann, *Proc. Third Topical Conf. on Part. Phys.*, W. A. Simonds and S. F. Tuan 編 (Western Periodicals, Los Angeles, 1970); *Elementary Particle Physics* (Springer-Verlag, Bonn, 1972); *Acta Phys. Austriaca Suppl.* **IX**, 1972 (1972); H. Fritzsch and M.

Gell-Mann, *Proceedings of the XVI International Conference on High Energy Physics*, J. D. Jackson and A. Roberts 編 (Fermi National Accelerator Laboratory, Batavia, IL, 1972); *Phys. Lett.* **47B**, 365 (1973).

52. S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D11**, 3583 (1975).

訳者あとがき

本シリーズは, Steven Weinberg 氏の "The Quantum Theory of Fields" I, II 巻の日本語訳である. このシリーズでは, Weinberg 氏は一貫して場の理論の論理性を中心に議論を進めている. つまり, 真の基本理論は弦理論やその更にその奥から姿を表しつつある理論であっても, 場の理論は量子力学と特殊相対性理論の基本的要請から我々の世界を記述する有効理論として成立するというのが著者の視点だ. この意味で, 同じ時期に出た他の場の量子論の本と比べても, このシリーズは非常にユニークなものであるといえる.

原著 I 巻は, 日本語訳では 1, 2 巻に分冊した. 1 巻では, 場の理論自身の構成が詳細に議論され, その後に実際の物理的過程を計算するためのファインマン則が述べられた. 2 巻では, 場の理論形式が正準理論, 経路積分と述べられ, くりこみ等が議論された.

これらの場の理論の基礎に基づいて, 原著 II 巻では各種の重要な概念が論じられる. この原著 II 巻は日本語訳 3, 4 巻に分冊しており, 本 3 巻では, 現代の素粒子論における標準理論の基礎をなす非可換ゲージ理論が導入され, 有効場の理論, くりこみ群, 大局的対称性の自発的破れの理論に基づく解析がそれらの一般論とともに有機的に展開されている. また, 次に刊行予定の 4 巻では, 演算子積展開, ゲージ対称性の自発的破れ, アノマリー, 拡がりのある場の配位などが論じられる. 読者は, 場の理論の基礎を一通り学んだ上で第 3 巻から第 4 巻を通して学ぶことにより, 場の理論の現代的様相に到達できるであろう. 著者 Weinberg はさらに超対称性, 超重力理論についての続巻も計画しており, 本書はその更なる飛躍への準備ともなる.

この本を作るにあたって, 著者 S. Weinberg 氏には幾つかの疑問点について御教示を戴いた. また, Campridge University Press の A. Woollat 氏には原著の LaTeX 原稿, および原著 II 巻第 1 刷に対する

詳細な修正リストを送って戴き, これを本訳書に全て反映させることができた. ここに感謝の意を表したい. (また本訳書では, 参考文献で原著にプレプリント番号のみ記載されているもののうち掲載先が分かったものについては, 掲載先を挙げるようにした.)

また, 本書の出版に際し, 吉岡書店の上川正二氏に大変お世話になった. ここに記して感謝する.

1998 年 3 月 訳者

索引

人名

イタリック体のページ番号は「関連書誌」と「参考文献」に引用した文献を示す.

日本語事項

英語事項

ISBN 4-8427-0000-9

訳者略歴

青山　秀明（あおやま　ひであき）

1976年：京都大学理学部物理学科卒

1982年：カリフォルニア工科大学博士課程修了．Ph.D

1982—1988年：スタンフォード線形加速器センター理論部研究員，ハーバード大学客員研究員等

1988年：京都大学理学部助手

現在：京都大学総合人間学部基礎科学科助教授
訳書に「物理学演習モスクワの森」（コゼル他編，吉岡書店），「場の理論—統計論的アプローチ」（パリージ著，吉岡書店），「経路積分法」（スワンソン著，吉岡書店）

有末　宏明（ありすえ　ひろあき）

1976年：京都大学理学部物理学科卒

1982年：京都大学理学博士

1982—1983年：日本学術振興会奨励研究員

1983—1985年：京都大学基礎物理学研究所研究員

1985—現在：大阪府立工業高等専門学校助教授
訳書に「Maple V数学解法辞典」（デビット著，オーム社（共訳））

物理学叢書

＊編　集＊

小　林　　稔（京都大学名誉教授）

井　上　　健（京都大学名誉教授）

山　本　常　信（京都大学名誉教授）

高　木　修　二（大阪大学名誉教授）

S. Weinberg：場の量子論（3巻）　非可換ゲージ理論　　1998 ©

1998年3月25日　第1刷発行

訳　者　青　山　秀　明
　　　　有　末　宏　明

発行者　吉　岡　　誠

〒606-8225 京都市左京区田中門前町87

株式会社　吉　岡　書　店

電話(075)781-4747/振替　01030-8-4624

印刷・製本㈱太洋社

ISBN 4-8427-0269-9

「物理学叢書」刊行に際して

二十世紀の物理学の進歩は，物質の極微の構造の暴露に，物質の精妙な機構の解明に，驚異的な発展，飛躍をもたらした．その結果，新しい自然力の解放，支配を実現化したばかりでなく，新しい物質の創造，生命の謎への挑戦をも企画せしめつつある．更に，既知の自然力の未曾有の強力な駆使さえ可能にしつつある．二十世紀後半に至って，原子力に，あるいはオートメーションに今や第二の産業革命を喚起せんとするに至った原動力は，物理学の開拓的な創造性によることは言をまたない．更に，現在の物理学は，かつての相対論，量子論の出現にも比すべき革命の前夜にあるといわれているこの時に当たり，物理学の新領域の単なる解説，あるいは時局的な技術書ではなく，真にわが国物理学の発展の糧となるべき良書の出版は緊急の必要事といわねばならぬ．ここに「物理学叢書」を編んで世に送る所以である．

この叢書に収められる原著は，いずれもそれぞれの分野の世界的権威者による定評ある名著に限られるが，前述の精神に鑑みその性格，スタイルに特徴あるものを選ぶと共に，その本質において創造的価値高きものを目標とした．

この叢書が，物理学またはその関連分野へ進む学徒に，よき伴侶として用いられ，真にその血肉となり得ることがわれわれの念願であり，更にこの叢書によって伝えられる海外の学風が，広くわが国の教育，研究へのよき刺戟となり，わが国の明日の科学を築く基礎に貢献するところがあれば幸いである．

(1954年12月)

物理学叢書

編集・小谷正雄／小林　稔／井上　健／山本常信／高木修二

シッフ　井上　健訳 新版 量子力学 上・下 上 368頁　下 320頁	刊行以来無比の標準的教科書として絶賛を博してきた本書は，原著第3版刊行にともない全面的に版を改めた．基本的な概念やその数学的形式を丁寧に解説されている量子力学の入門書である．
ゴールドスタイン　瀬川富士他訳 新版 古典力学 上・下 上 528頁　下416頁	最近，物性物理や素粒子物理を学ぶ人の間に，古典力学はきちんと学ぶべきだという気持が強い．本書は，場の理論から，多体系の物理学を研究する上で，基本的な入門書であり，古典力学を新しい見地から解説．
モット，マッセイ　高柳和夫他訳 新版 衝突の理論 (全4巻) 上 I　上・II 328頁 下 I　下・II 232頁	量子力学の重要な適用対象である衝突理論を丁寧に述べた代表的教科書である．衝突の一般論と，電子衝突，原子と原子の衝突，さらに原子核による核子の散乱など多くの実際問題を扱っている．
パノフスキー，フイリップス　林忠四郎他訳 新版 電磁気学 上・下	実験物理学，物性理論，素粒子論などを専攻する学生から無比の教科書といわれた旧版を改良し，新しい内容を追加した新版は，電磁気学の教科書として最良のものである．
ロッシ　中井祥夫他訳 光学	光の波動モデルの立場で基本的な物理概念を啓蒙的に解説した教科書．ホイヘンスの原理が懇切に記述されており，光波の発生も直観的に理解できるよう充分配慮されている．

頁数記載なきは品切もしくは未刊

スタウファー　　小田垣　孝訳 **浸透理論の基礎**	浸透理論は不規則系の中に作られるクラスターの性質を対象とした極めて汎用性の高い理論であり，本書はその最良の入門書である．スケーリング則や繰り込み群が駆使され，フラクタルや計算機実験にも触れられている．
メンスキー　　菅野公男訳 **径路の幾何学と素粒子論**	径路の概念を用いて場の量子論の問題をはば広く論じることにより「径路」の概念が場の量子論にとって必要であるだけでなく自然でもあることを強調する．本訳書はソヴィエトで出版されるはずの改訂版に基づいている．
J.J.Sakurai　　桜井明夫訳 **現代の量子力学** 上下 上 392頁　下 320頁	素粒子物理学の独創的理論家であった著者が，ＵＣＬＡでの多年の講義に基づき書き遺した現代的教科書．非相対論的量子力学の核心が，最近の理論・実験の発展に則し，新しい視点から明快かつ具体的に記述されている．
ジョージアイ　　九後汰一郎訳 **物理学におけるリー代数** ―アイソスピンから統一理論へ―　224頁	Glashow と共に $SU(5)$ に基づく素粒子の大統一理論を初めて提唱した著者が，その研究の苦闘の中で体得した豊富な実践的知識を込めて書いた，リー代数とその表現論のわかり易い解説書．
フォスター・ナイチンゲール　　原　哲也訳 **一般相対論入門** 284頁	初学者には難解とも思える一般相対論の内容を，分り易く解き明かしてある．物質の存在が時空を歪め，その曲がりにより重力的現象が起因するという概念を平易，明快に解説．
ジーガー　山本恵一・林　真至・青木和徳訳 **セミコンダクターの物理学** 上・320頁　下・340頁	電子輸送現象にかなりの頁数を費やしており，企業の研究者にとっても最適である．さらに多くの図面により，物理現象の把握に役立つ．
ゲプハルト・クライ　　好村滋洋訳 **相転移と臨界現象** 378頁	ランダウの相転移論から始まり，先年ノーベル賞の対象となったウイルソンのくりこみ群までを，あまり数式を用いず実験例との対応を明らかにするため，豊富な図表を用いて親しみ易く解説した現代的入門書．
ストルコフ・レヴァニューク　　疋田朋幸訳 **強誘電体物理入門** 248頁	強誘電体の相転移を構造相転移の一つとみなし，統一的に基礎的な立場から記述．物質の各論や応用などには殆どふれず，物理的なエッセンスのみを抽出して解説する両著者ともにこの分野の世界的権威である．
パリージ　　青木　薫・青山秀明訳 **場の理論** ――統計論的アプローチ――　438頁	第一線の研究者の手になる量子場理論の最新の教科書，イジング模型，ランダウ・ギンツブルグ模型等を導入し，相転移の物理を基礎から説き起こす．素粒子論や統計物理を志す学生・院生のための教科書として最適．
キューサック　　遠藤裕久・八尾　誠訳 **構造不規則系の物理** 上下 上 286頁　下 282頁	構造不規則系の研究は物理学の魅力ある分野である．本書は構造不規則系の静的・動物構造，電子状態，またその応用について，実験，理論両面にわたる初めての総合的な教科書．